MINICURSOS PARA ENSINO MÉDIO

Lista 4 – derivadas e suas aplicações

Professor Lucas David

1. Calcule as derivadas primeiras das seguintes funções com respeito à variável em questão:

a) cos (2x)

b) $sen^3(x)$

c) $e^{7x^2 - 2x}$

d) $cos^n(x)$, com *n* natural

e) cos(sen(x))

f) sen(4x)

g) $sen(e^x)$

h) $e^{sen(2x)}$

i) $e^{\frac{iEt}{\hbar}}$, com E sendo uma constante.

j) $Ae^{i(kx-m)}$, com *k*, *A* e *m* sendo constantes.

2. Calcular o valor da derivada da função $f(x) = cos^3(x) + sen^3(x)$ no ponto $x_0 = \pi/2$.

3. Obter a equação da reta tangente à curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ no ponto de abscissa -2.

4. Um movimento é dito harmônico simples unidimensional (MHS) quando $m\frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2} = -kx_{(t)}$, isto

é, quando a aceleração e a força resultante são proporcionais e opostas ao deslocamento. Siga os itens a seguir e faça o que é pedido:

a) Prove que $\frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2} = a$ e busque dar um significado físico à equação.

b) Se rearranjamos a equação diferencial para o MHS, obtemos $\frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right) x_{(t)}$. Seja

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$. Prove que $x_{(t)} = c_1 cos(\omega t) + c_2 sen(\omega t)$ é uma solução para $\frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2} = -\omega^2 x_{(t)}$.

c) Admita que $x_{(t)} = c_1 cos(\omega t) + c_2 sen(\omega t)$ seja reescrita de forma tal que $x_{(t)} = Acos(\omega t - \varphi)$, onde

$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $tg(\varphi) = \frac{c_2}{c_1}$. A partir disso, derive as equações para $v_{(t)}$ e $a_{(t)}$.

5. Uma função de onda simples pode ser representada pela seguinte expressão matemática:

$\Psi_{(x,t)} = sen 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - vt\right)$, onde v representa a velocidade – admitida aqui como constante –, t o tempo, x a posição e λ o comprimento de onda associado.

a) De quantas variáveis depende a equação acima?

b) Sendo $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi v$, prove que $\Psi_{(x,t)} = sen 2\pi (kx - \omega . t)$

c) Quando trabalhamos com funções que dependem de mais de uma variável, como é o caso da função de onda por nós considerada, faz-se necessário introduzir o conceito de *derivada parcial*. Tomemos, por exemplo, a função de onda aqui considerada, que depende de x e t. Tomar a derivada parcial de $\Psi_{(x,t)}$ com relação a x (escreve-se $\frac{\partial \Psi_{(x,t)}}{\partial x}$) é derivar $\Psi_{(x,t)}$ com relação a x, considerando t como uma constante. Analogamente, se tomamos a derivada parcial de $\Psi_{(x,t)}$ com relação a t, escreve-se $\frac{\partial \Psi_{(x,t)}}{\partial t}$, faremos a derivada primeira de $\Psi_{(x,t)}$ com relação a t, considerando x como uma constante. Assim, por exemplo, $\frac{\partial \Psi_{(x,t)}}{\partial t} = \left[\frac{d\Psi_{(x,t)}}{dt} \right]_{com\, x\, considerado\, constante}$,

$\frac{\partial \Psi_{(x,t)}}{\partial x} = \left[\frac{d\Psi_{(x,t)}}{dx} \right]_{com\, t\, considerado\, constante}$ e assim por diante. A partir desta explicação, calcule as seguinte derivadas parciais, considerando $\Psi_{(x,t)} = sen\, 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - vt \right)$: $\frac{\partial \Psi_{(x,t)}}{\partial t}$, $\frac{\partial \Psi_{(x,t)}}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \Psi_{(x,t)}}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 \Psi_{(x,t)}}{\partial x^2}$

6. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_{(x,t)}}{\partial x^2} + V_{(x,t)} \Psi_{(x,t)} = i\hbar \frac{\partial \Psi_{(x,t)}}{\partial t}$$

Ela é conhecida como Equação de Schrödinger, onde $\Psi_{(x,t)}$ representa a função de onda associada a uma partícula de massa *m* exposta a um potencial $V_{(x,t)}$.

a) De quais variáveis depende a função de onda associada à partícula de massa m?

b) Considere que a função de onda $\Psi_{(x,t)}$ para o estado energético mais baixo de um oscilador harmônico simples, consistindo de uma partícula de massa m sobre a qual atua um potencial $V_{(x,t)} = V_{(x)} = Cx^2/2$, é:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-(\sqrt{Cm}/2)x^2} e^{-(i/2)\sqrt{C/m}.t}$$

onde *A* é uma constante real que pode assumir qualquer valor. Prove que essa expressão para $\Psi_{(x,t)}$ satisfaz a equação de Schrödinger.