

MINICURSOS PARA ENSINO MÉDIO

Lista de exercícios sobre quântica - maio de 2019

Professor Lucas David

Aquilo que conhecemos pelo nome de *Efeito fotoelétrico* só pôde ser plenamente explicado através do uso da chamada hipótese de Planck. Se considerarmos a luz como composta por pequenos corpúsculos que posteriormente vieram a ser chamados *fótons*, afirma-se que a energia de um fóton é diretamente proporcional à frequência da luz à qual ele está associado. Este foi o uso feito por Einstein da hipótese de Planck.

Assim,

$$E_{\text{fóton}} \sim f$$

Onde f , denota a frequência da luz considerada.

O que nos permite sair desta relação de proporcionalidade e chegar a uma relação de igualdade, isto é, a uma equação propriamente dita, é a introdução de uma constante fundamental para a física quântica: a constante de Planck, representada pela letra h . A constante de Planck possui um valor extremamente pequeno. A *26ª Conferência Geral de Pesos e Medidas* fixou que o valor padrão de h , considerado a partir de 20 de maio de 2019, será de $6,62607015 \times 10^{-34}$ J.s. Portanto, a introdução da constante de Planck na relação de proporcionalidade há pouco referida gera:

$$E_{\text{fóton}} = h.f$$

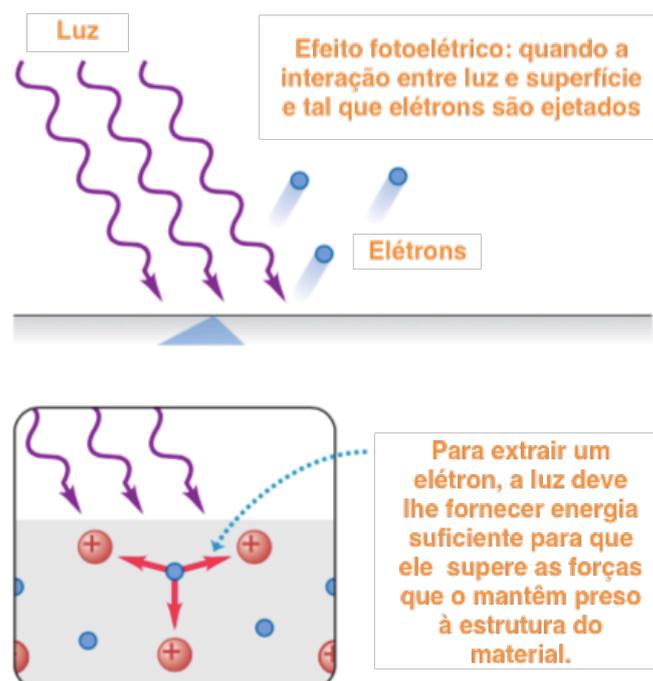
Como fica claro pelo seu nome, o efeito fotoelétrico envolve algum tipo de interação entre luz e elétrons. Mais precisamente, ele é caracterizado quando, ao incidirmos luz sobre uma

superfície metálica, verificamos a extração de alguns elétrons, o que, a depender da montagem experimental utilizada, pode ser evidenciado pelo surgimento de uma corrente elétrica. O efeito fotoelétrico já era conhecido no século XIX, mas não havia uma explicação para a sua natureza que fosse coerente com a física vigente à época. A questão central é que a extração dos elétrons ocorre apenas para *certos* tipos de luz ou, sendo mais específico, a partir de um certo valor de frequência, tendendo a ser mais fácil a extração quando caminhamos ao longo do espectro para o lado do violeta. Além disso, a extração dos elétrons parece ser praticamente instantânea e não depender da intensidade da luz utilizada, fatos experimentais que se contrapunham frontalmente ao esperado com base na então física canônica, a qual encontrava seu ponto máximo de refinamento no eletromagnetismo de Maxwell.

Classicamente, podemos pensar da seguinte maneira: a luz, ao incidir sobre uma superfície metálica, interage com elétrons que se encontram nas camadas mais externas do metal. Se a luz for suficientemente energética, ela será capaz de superar a energia que *prende* o elétron à estrutura do material em questão. Naturalmente, em primeira aproximação, é de se esperar que:

1) elétrons mais externos estejam mais fracamente ligados à estrutura geral que elétrons ocupando setores mais internos;

2) a energia necessária para extrair os elétrons mais externos dependerá do material em questão.



Se colocarmos nossas ideias em equação, teremos:

$$E_{el\acute{e}tron} = E_{luz} - E_{material}$$

Onde $E_{el\acute{e}tron}$ é a energia do elétron ejetado (perceba que se trata de uma energia cinética), E_{luz} a energia da luz incidente e $E_{material}$ a energia que prende um dado elétron à estrutura do material — esta energia é conhecida como função trabalho, representada em geral pela letra Φ . Assim, fica claro que a energia da luz deve superar a função trabalho, do contrário o efeito fotoelétrico não se verifica.

Ao usar a hipótese de Planck para se referir à luz, Einstein entrou em rota de colisão com a teoria ondulatória vigente à época. Apenas para se ter uma ideia, tal teoria previa que quanto maior fosse a intensidade da luz, mais facilmente o efeito elétrico seria verificado. Esta previsão, porém, não encontrava nenhum respaldo experimental. Utilizando as informações contidas nesta breve introdução ao efeito fotoelétrico, podemos escrever:

$$E_{cin\acute{e}tica\ m\acute{a}xima\ do\ el\acute{e}tron} = h \cdot f_{luz} - \Phi$$

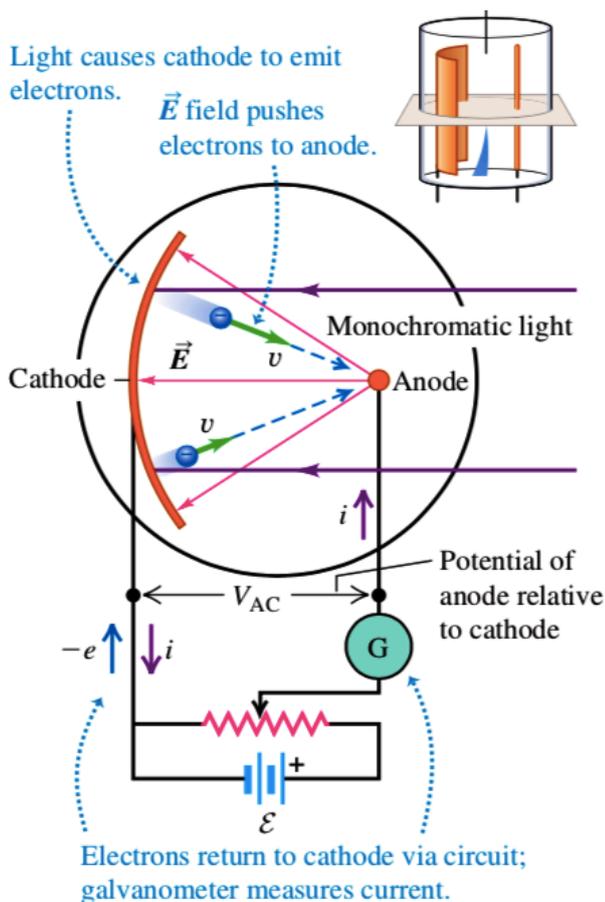
O subscrito «cinética máxima do elétron» é posto aqui pelo fato de considerarmos, via de regra, os elétrons que ocupam as posições mais externas em certo material, ou seja, aqueles que estão menos fortemente ligados à estrutura como um todo. É de se esperar que, caso ocorra efeito fotoelétrico para elétrons em regiões diferentes (mais ou menos externas), suas energias de movimento também sejam diferentes.

1. A razão entre a energia e o momentum de um fóton é igual à velocidade da luz. a) utilizando a equação fundamental da ondulatória e a hipótese de Planck, prove que $p = h/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda da radiação eletromagnética em questão. (Lembre-se que radiação eletromagnética é um termo mais geral que luz. A luz é uma radiação eletromagnética, mas nem toda radiação eletromagnética é luz). b) considere um *pointer* de 5,00 mW que emite um laser vermelho com $\lambda = 650$ nm; calcule a magnitude do momentum de cada fóton; c) Quantos fótons o laser emite a cada segundo? d) quando lidamos com física quântica, é natural que os valores de energia sejam muito pequenos. Assim, é conveniente expressar esses valores em eV (elétrons-volt).

Considerando $c = 3.10^8$ m/s a velocidade da luz no vácuo, calcule em eV a energia de um fóton para a luz em questão.

2. Um próton está se movendo com uma velocidade baixa quando comparada à da luz. Sua energia cinética vale K_1 e seu momentum p_1 . A) Se o momentum do próton é dobrado, qual será a relação entre K_1 e sua nova energia cinética, K_2 ? b) Um fóton com energia E_1 tem momentum p_1 . Se um outro fóton tem momentum $p_2 = 2p_1$, como estão relacionados E_2 (referente ao segundo fóton) e E_1 ?

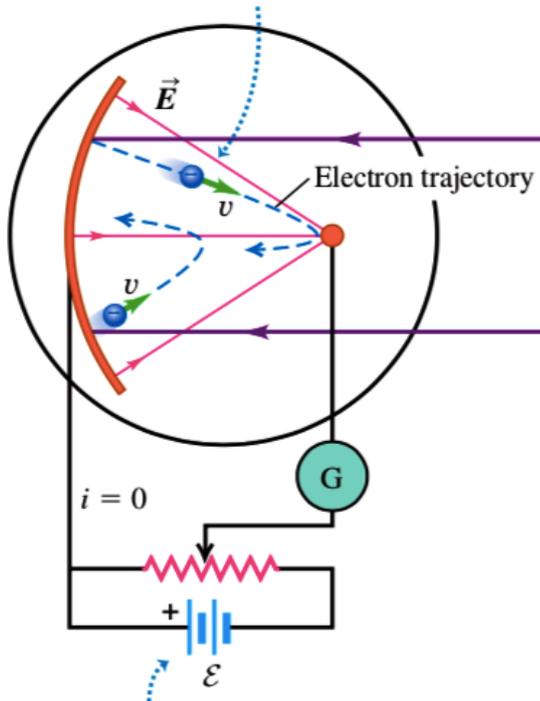
3. O olho humano é mais sensível à luz verde de comprimento de onda 505 nm. Experimentos têm mostrado que quando pessoas são deixadas um tempo suficientemente grande em uma sala escura a ponto de elas se acostumarem com a escuridão, um simples fóton de luz verde será capaz de acionar os receptores localizados nos bastões da retina. a) qual a frequência deste fóton? b) quanto de energia é transportado por um fóton desta luz verde? Dê a resposta em Joules e em elétrons-volt. c) Para se ter uma noção do quão pequena é esta quantidade de energia, determine a velocidade com a qual se moveria uma bactéria de massa $9,5 \times 10^{-12}$ g caso tivesse esta energia cinética.



4. Um conceito bastante importante em experimentos de efeito fotoelétrico é o de potencial de frenagem ou de corte. Considere a figura ao lado. Luz incide sobre a superfície esférica chamada cátodo. Supondo que esta luz seja suficientemente energética, o cátodo, por efeito fotoelétrico, emite elétrons. Como há uma diferença de potencial estabelecida entre ânodo e cátodo, de forma que o cátodo está junto ao polo positivo e o ânodo junto ao polo negativo, os elétrons extraídos do cátodo são atraídos pelo ânodo («field pushes electrons to anode», conforme a figura), o que faz com que seja verificado uma corrente elétrica no circuito. O que aconteceria, porém, se invertêssemos a polaridade da fonte de força eletromotriz (fonte de tensão ou diferença de potencial)? Veja a figura abaixo.

diferença de potencial)? Veja a figura abaixo.

We now reverse the electric field so that it tends to repel electrons from the anode. Above a certain field strength, electrons no longer reach the anode.



The stopping potential at which the current ceases has absolute value V_0 .

Com a inversão da polaridade da tensão, se o módulo da tensão for suficiente grande, é possível evitar que surja uma corrente fotoelétrica no interior do circuito. A tensão para a qual a corrente fotoelétrica deixa de existir é o que chamamos de tensão de frenagem ou de corte. Chamemos este potencial de frenagem de V_0 . Consideremos um elétron externo que deixa a superfície do metal com energia cinética máxima, $K_{máxima}$. À medida que o elétron se dirige do cátodo para o ânodo, o campo elétrico promovido pela fonte de tensão, agora invertido, atua no sentido de diminuir sua velocidade, isto é, realiza um trabalho negativo. Como o trabalho realizado sobre um sistema é igual à sua variação de energia cinética, se consideramos um elétron desde o momento em que é extraído com energia cinética máxima até o momento em

que é totalmente parado, teremos:

$$\text{Trabalho} = K_{final} - K_{inicial} = 0 - K_{máxima}$$

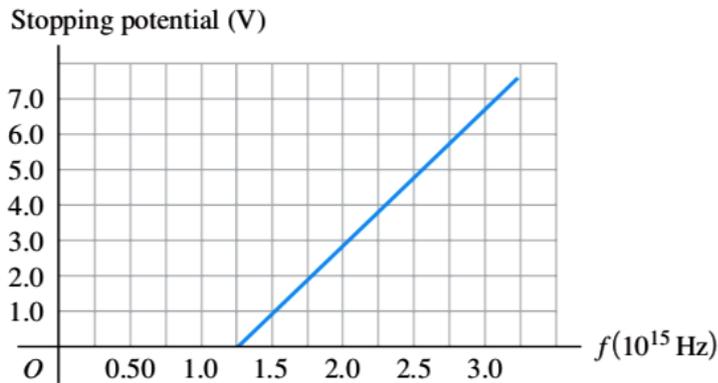
Como o trabalho realizado pela força elétrica sobre o elétron é $-eV_0$, podemos escrever:

$$-eV_0 = -K_{máximo}$$

$$K_{máximo} = eV_0$$

Considere que, durante um experimento de efeito fotoelétrico com luz de certa frequência, tenha sido verificado que a corrente do circuito zera quando uma diferença de potencial de 1,25 V é exercida entre o cátodo e ânodo. a) determine a energia cinética máxima (em Joules e elétron-volts) dos elétrons extraídos do metal em questão; b) determine a velocidade máxima destes fotoelétrons; c) esses elétrons são relativísticos?

5. O gráfico ao lado mostra o potencial de frenagem como uma função da frequência da luz incidente sobre uma superfície metálica.



(a) Ache a função trabalho para este metal. b) Qual é o valor da constante de Planck que pode ser obtido a partir deste gráfico? c) por qual motivo o gráfico não passa para valores abaixo do eixo x? d) se um metal diferente fosse usado, quais características do gráfico você esperaria permanecerem as mesmas e quais seriam diferentes?

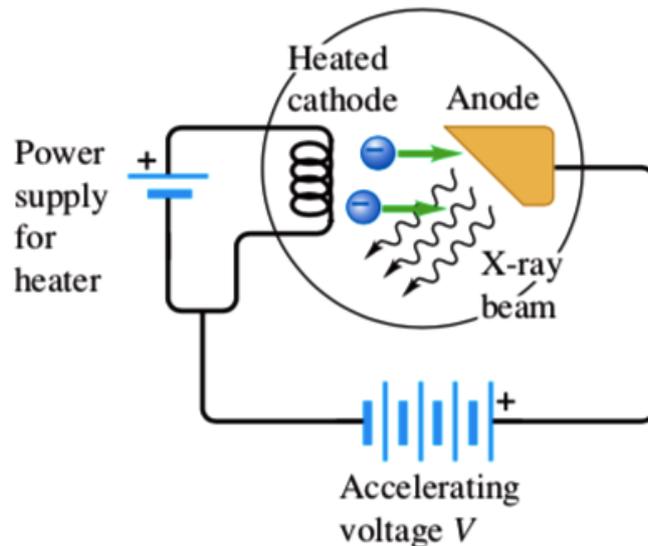
as mesmas e quais seriam diferentes?

Element	Work Function (eV)
Aluminum	4.3
Carbon	5.0
Copper	4.7
Gold	5.1
Nickel	5.1
Silicon	4.8
Silver	4.3
Sodium	2.7

6. A tabela ao lado fornece funções trabalho para alguns metais. a) considere uma superfície composta apenas por níquel. Se uma luz de 235 nm incide sobre esta superfície, qual será a máxima velocidade dos elétrons emitidos por esta superfície? b) Dentre os metais presentes na tabela, quais são aqueles que não serão extraídos pela luz

considerada?

7. O efeito fotoelétrico nos dá uma forte evidência no sentido de que a luz é absorvida sob a forma de fótons. Isto fica claro na medida em que a energia desses fótons é transferida aos elétrons mais externos de um certo material, o que pode fazer com que eles sejam extraídos. Para que os físicos ficassem realmente convencidos de que a luz é formada por estes corpúsculos chamados fótons, seria necessário demonstrar também o inverso, isto é, que a luz emitia (e não apenas era absorvida como) fótons. Há um experimento que mostra esta «propriedade reversa» de modo convincente e pode ser tomado como o oposto do efeito fotoelétrico. Sabemos que a luz pode extrair elétrons de uma certa superfície se for suficientemente energética. O que aconteceria se bombardeássemos uma superfície com elétrons ultra-rápidos? Considere a figura abaixo:



O filamento da figura é aquecido a uma temperatura altíssima, de forma que elétrons começam a ser emitidos. Neste caso, não é a luz que faz com que os elétrons sejam emitidos, mas a alta temperatura à qual o filamento é submetido. Entre o cátodo aquecido, como mostrado na figura, e o ânodo, é exercida uma enorme diferença de potencial, de forma que os elétrons que saem por emissão termiônica do filamento são acelerados a altíssimas velocidades. Verifica-se que, à medida que os elétrons colidem com o ânodo, uma misteriosa radiação é produzida. Esta radiação é invisível e extremamente energética, sendo capaz de impressionar certas superfícies. Como inicialmente não havia ideia a respeito do que poderia ser essa radiação, deu-se a ela o nome de *Raios X*. Como podemos interpretar este fenômeno? O ânodo como que «produz» radiação basicamente desacelerando os elétrons ultra-rápidos que o atingem. Este processo acabou ganhando o nome de *bremstrahlung*, que, no alemão, significa radiação por «quebra» ou radiação «pro frenagem». A radiação produzida desta maneira muitas vezes é referida por «radiação de *bremstrahlung*», embora haja uma repetição no termo «radiação». Perceba como se trata de uma situação inversa à do efeito fotoelétrico. Na produção de raios X, os elétrons como que «geram» radiação, ao passo que no efeito fotoelétrico a luz é absorvida de modo a extrair os elétrons.

Ainda considerando a figura, um elétron emitido termionicamente e acelerado em um diferença de potencial chega ao ânodo com um energia eV , onde V é a ddp (tensão) em questão. Se este elétron é parado, sua energia se converte em radiação eletromagnética. Se toda a energia cinética deste elétron é transformada em radiação eletromagnética, teremos:

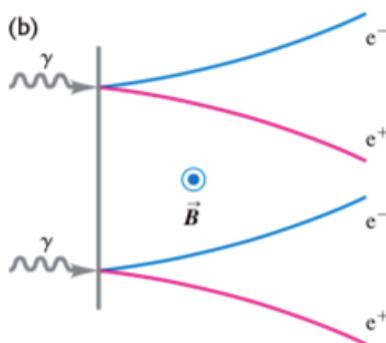
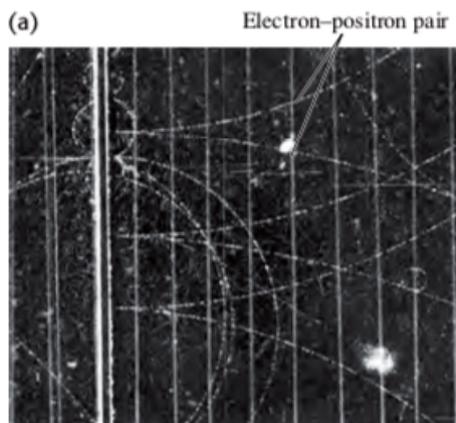
$$eV = hf_{\text{máximo}}$$

A partir do exposto acima sobre radiação de *bremmsstrahlung*, a) prove que $eV = hc/\lambda_{min}$ para a radiação considerada; b) a radiação produzida é extremamente energética. O que podemos afirmar sobre sua frequência e seu comprimento de onda? c) elétrons em um tubo de raios-X são acelerados através de uma diferença de potencial de 10,0 kV antes de atingir um alvo que faz as vezes de ânodo. Se um elétron produz um fóton no impacto com o alvo, qual deve ser o comprimento de onda mínimo dos raios-x resultantes? Expresse esta resposta em Joules e elétron-volts.

8. a) Qual é a mínima diferença de potencial entre o filamento e o alvo (ânodo) de um tubo de raios-x para que este dispositivo produza raios-x com comprimento de onda 0,150 nm? b) Qual é o menor comprimento de onda produzido em um tubo de raios-x que opera sob uma ddp de 30,0 kV?

9. Um fenômeno extremamente interessante que pode ser explicado apenas considerando as ondas eletromagnéticas como formadas por fótons envolve os conhecidos raios gama, ondas

eletromagnéticas que estão na extremidade mais energética do espectro eletromagnético. Quando fazemos uma radiação eletromagnética de alta energia — como raios-X — incidir sobre um alvo — digamos, um elétron — a radiação pode ser espalhada, isto é, ter sua trajetória alterada, ao mesmo tempo que o elétron é desviado. É possível medir que a radiação espalhada tem um novo comprimento de onda que depende do ângulo de espalhamento. Este efeito é conhecido como efeito ou espalhamento Compton. Em alguns casos, porém, se a radiação eletromagnética é mais energética ainda, acontece algo diferente. Tomemos o caso dos raios gama. Se um fóton de raio gama de comprimento de onda suficientemente pequeno incide sobre um alvo, ele pode não ser espalhado. Em vez disso, o raio pode desaparecer completamente e dar origem a duas novas partículas: um elétron e um pósitron (uma partícula que tem



a mesma massa de repouso de um elétron, mas possui carga positiva). Veja a figura ao lado. Este processo, conhecido como produção de pares, foi observado pela primeira vez pelos físicos Patrick Blackett e Giuseppe Occhialini em 1933. O elétron e o pósitron devem ser produzidos para que haja conservação de carga, já que o fóton incidente tem carga zero. a) admita que um raio gama dê

origem a um par pósitron/elétron. Seja m a massa de repouso do pósitron e do elétron e c a velocidade da luz no vácuo. Calcule a massa de repouso total para o par pósitron/elétron. b) se $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg e $c = 3 \times 10^8$ m/s, determine, em elétrons-volt, a energia de repouso para este par; c) Determine a energia mínima que um fóton deve ter para formar este par; d) qual deve ser o comprimento de onda máximo de um fóton para formar o par pósitron/elétron?

10. Um elétron e pósitron, inicialmente distantes um do outro, se movem um na direção do outro sobre uma mesma reta com velocidade de igual módulo. Eles colidem e se aniquilam, gerando dois fótons. A energia de repouso do elétron é de 0,511 MeV. Considere que as energias cinéticas do elétron e do pósitron são desprezíveis. a) por que é impossível que esta colisão gere apenas um fóton? b) encontre a energia de cada fóton produzido a partir da aniquilação; c) determine a frequência e comprimento de onda de cada fóton produzido; d) em qual região do espectro estão esses fótons?

11. Repita a questão anterior considerando que a energia cinética do pósitron e do elétron valem 5,000 MeV.

12. Um dos princípios mais fundamentais da mecânica quântica — para muitos, o mais importante — é o chamado princípio da incerteza de Heisenberg. Em discussões mais gerais envolvendo relações de incerteza, esta é descrita em termos do conceito estatístico de desvio padrão, que é uma espécie de dispersão de um conjunto de valores em torno de um valor médio. Suponha que uma coordenada x de uma partícula tenha uma incerteza Δx ; se o momentum correspondente em x , p_x , tem uma incerteza Δp_x , então estas incertezas estão relacionadas entre si através de uma desigualdade:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

Nesta equação, temos o «h cortado», dado por:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628(53) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Esta equação é uma das formas do princípio da incerteza de Heisenberg. Este princípio afirma, de maneira geral, que é impossível simultaneamente determinar a posição e o momentum de um sistema com precisão arbitrariamente grande, como era de se esperar com base na física clássica. No âmbito da física clássica, tudo seria uma questão de tecnologia. O princípio da incerteza de Heisenberg mostra que a própria natureza tem um limite de precisão à qual uma medida pode ser submetida. As incertezas da posição e do momentum acabam surgindo como quantidades complementares. Ou seja, se a incerteza na posição é muito pequena, significa que teremos uma grande incerteza no momentum — e vice-versa. O princípio da incerteza também tem uma formulação baseada em energia e tempo:

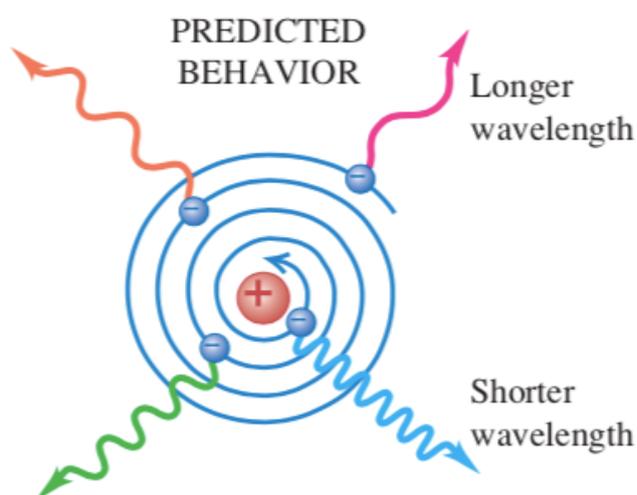
$$\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$$

Na prática, qualquer fóton real tem uma dimensão limitada e, assim, passa por um ponto num espaço de tempo limitado, o que pode afetar a energia e momentum do fóton. Para ilustrar este fato, considere a situação a seguir. Muitos tipos de lasers emitem luz não em feixes contínuos, mas em feixes transmitidos em pulsos. Um laser de telúrio e óxido de alumínio consegue produzir luz de comprimento de onda de 800 nm através de pulsos ultracurtos que duram apenas $4,00 \times 10^{-15}$ s (4 femtosegundos). A energia de um pulso produzido por este laser é de $2,00 \times 10^{-6}$ J e o pulso se propaga na direção do eixo x . Determine: a) a frequência da luz em questão; b) a energia e a incerteza mínima para a energia de um fóton deste pulso; c) a incerteza mínima para a frequência da luz deste pulso; d) o tamanho deste pulso em metros e em múltiplos do comprimento de onda; e) o momentum e a incerteza mínima para o momentum de um fóton deste pulso; f) o número aproximado de fótons neste pulso.

13. Um pulso ultra curta tem uma duração de 9,0 femtosegundos ($9,0 \times 10^{-15}$ s) e produz uma luz com comprimento de onda 556 nm. a) quanto vale o momentum de um fóton deste pulso? b) qual a incerteza do momentum de um fóton deste pulso?

14. A quantização da energia dos fótons e a hipótese segundo a qual a luz é formada por pequenos pacotes de energia chamados quanta permitiu fornecer respostas a alguns problemas que estavam em aberto no final do século XIX. Tomemos, por exemplo, o caso do modelo atômico. O modelo atômico vigente no final do século XIX era o modelo de Thomson, de acordo com o qual elétrons estariam imersos em uma espécie de «massa positiva», como um pudim passas — analogia

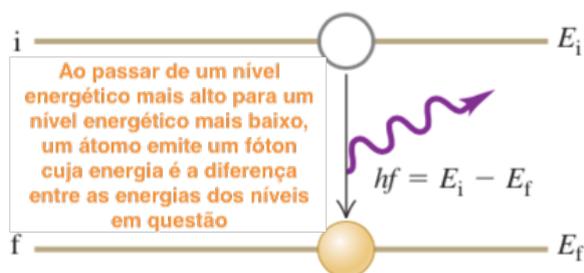
consagrada para fazer referência a este modelo. Tratava-se, portanto, de um modelo com aspecto maciço. Rutherford, em sua célebre experiência de bombardeamento de partículas alfa sobre uma fina folha de ouro, chegou à conclusão que, na verdade, o átomo pouco tinha de maciço, a maioria das partículas alfa sofrendo pequenos desvios ao interagir com a folha de ouro. Algumas partículas alfa, porém, eram fortemente ricocheteadas, como se houvesse algo bastante denso em algum lugar do átomo. A partir das evidências colhidas em seu experimento, Rutherford propôs um novo modelo para o átomo, modelo que ficou conhecido como «nuclear». Neste, haveria uma parte central muito pequeno e eminentemente positiva — o núcleo. Em torno deste núcleo havia elétrons em órbita — estes constituíam a eletrosfera. O modelo proposto por Rutherford se adequava bem às evidências por ele colhidas em seu experimento. Havia, porém, um grande problema. De acordo com a teoria clássica do eletromagnetismo, cargas em movimento deveriam emitir radiação e, por conservação



de energia, os elétrons deveriam, à medida que emitem radiação, se posicionar em órbitas cada vez mais internas. O átomo, portanto, seria, de acordo com a teoria clássica do eletromagnetismo, um sistema profundamente instável, como mostra a figura ao lado. As evidências experimentais, contudo, mostravam que os átomos eram estáveis. O físico dinamarquês Niels Bohr se interessou pelo problema e fez alguns postulados que

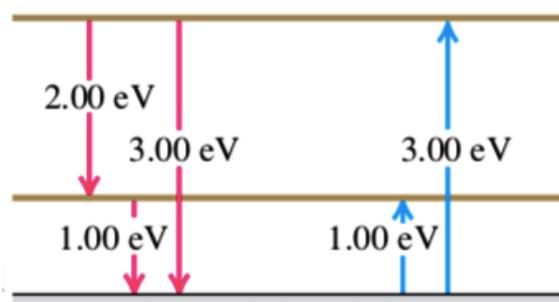
misturam física clássica e física moderna. É neste sentido que o modelo atômico de Bohr é considerado por muitos um modelo mesclado, de transição. A ideia básica de Bohr foi a seguinte: a partir da análise dos espectros de emissão de alguns átomos e do fato de este espectro não ser contínuo, mas em linhas, parece razoável afirmar que os átomos emitem fótons apenas com certas frequências específicas. Sabe-se que a energia de um fóton é dada por $E = hf$. Durante a emissão de um fóton, então, a energia de um átomo se altera por um valor igual à energia do fóton. Assim, por exemplo, um átomo é excitado e, ao voltar ao estado ocupado inicialmente, um fóton é emitido. Conclui-se, portanto, que na medida em que apenas fótons de certas frequências são emitidos, os átomos não podem ocupar qualquer estado energético, mas apenas *certos* estados energéticos, isto é, os estados energéticos de um átomo são quantizados, não podendo assumir qualquer valor. Se a diferença entre estados de energia é igual à energia do fóton emitido, podemos escrever:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f$$



Suponha que um átomo de lítio excitado emita luz vermelha com comprimento de onda 671 nm. Calcule, em Joules e elétron-volts, a energia do fóton correspondente.

15. A figura ao lado mostra alguns níveis de energia para um átomo hipotético. Admita que 0,00 eV seja o nível fundamental do átomo em questão. a) Quais são as frequências e comprimentos de onda das linhas espectrais que este átomo pode emitir quando excitado? b) quais comprimentos de onda este átomo pode absorver se está no estado fundamental? c) desenhe um espectro de emissão aproximado para este átomo. Use uma tabela de comprimentos de onda para ter uma ideia da cor referente a cada radiação.



16. A hipótese de Bohr referida na questão 14 estabelecia a relação entre espectros atômicos e níveis energéticos. No entanto, por si só, ela não fornecia elementos no sentido de prever os níveis energéticos de um átomo particular. Bohr resolveu enfrentar essa questão para o átomo mais simples: o hidrogênio. Bohr inicialmente postulou que cada nível energético de um átomo de hidrogênio fazia referência a um elétron em órbita circular estável em torno do núcleo. Entrando em conflito com o esperado classicamente, como já foi mencionado, Bohr postulou que um elétron nesta órbita não emitia radiação. A emissão ou absorção de radiação se daria apenas no momento em que houve uma transição de órbita — seja para um órbita mais externa, seja para uma órbita mais interna. Como resultado de um argumento razoavelmente complicado que relacionava a frequência angular da luz emitida à velocidade angular de um elétron em estados energéticos excitados elevados, Bohr propôs que a magnitude do momentum angular de um elétron é uma grandeza quantizada. Trata-se de um resultado incrível. A quantização não atingiria apenas a energia, mas também o momentum angular do elétron em um átomo. Para dar uma ideia do funcionamento da quantização do momentum angular, consideremos elétrons em diferentes órbitas,

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. À medida que os índices dos raios dessas órbitas aumentam, temos órbitas mais externas. À cada órbita podemos associar uma velocidade com o elétron se movimenta: v_1, v_2, \dots, v_n . O valor de n para cada órbita é chamado de *número quântico principal*, que você deve conhecer bem das aulas de química. A magnitude do momentum angular de um elétron de massa m ocupando um nível de energia n é dada por $L = mv_n r_n$. A quantização do momentum angular do elétron mostra que o momentum angular é sempre um múltiplo inteiro de $h/2\pi$. Assim, podemos escrever:

$$L_n = mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

Bohr, então, considerou um modelo «newtoniano» para o átomo de hidrogênio, mas incorporando a quantização. a) Faça um desenho esquemático no qual um elétron ocupando uma órbita r_n gira em torno do próton que ocupa o núcleo do hidrogênio; b) indique as forças que atuam sobre o sistema; c) é necessário considerar alguma força de natureza gravitacional? Justifique sua resposta. d) sabendo que a força elétrica de atração entre próton e elétron é dada por

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}$$

utilizando considerações a respeito da força resultante que atua sobre o sistema e a conservação do momentum angular, prove que

$$r_n = \epsilon_0 \frac{n^2 h^2}{\pi m e^2}$$

e) Ainda no espírito do item d, prove que

$$v_n = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^2}{2nh}$$

f) considerando $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ e $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$, calcule o raio do elétron para o estado fundamental. Este raio é conhecido como raio de Bohr.

g) A energia total de um elétron em uma órbita r_n será a soma de sua energia potencial elétrica, U_n , e sua energia cinética, K_n . A energia potencial elétrica é dada por:

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$$

Use a equação clássica para a energia cinética e as equações obtidas nos itens anteriores para mostrar que

$$E_n = K_n + U_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{me^4}{8n^2h^2}$$

h) Ache a energia cinética, potencial elétrica e total para um átomo de hidrogênio em seu primeiro estado excitado;

i) Determine o comprimento de onda e frequência do fóton emitido quando o átomo de hidrogênio passa do primeiro estado excitado para o estado fundamental.

j) mostre que para níveis energéticos muito altos, isto é, para valores de n muito grandes, os níveis energéticos ficam cada vez mais próximos. Os raios referentes a esses níveis energéticos também ficam cada vez mais próximos?