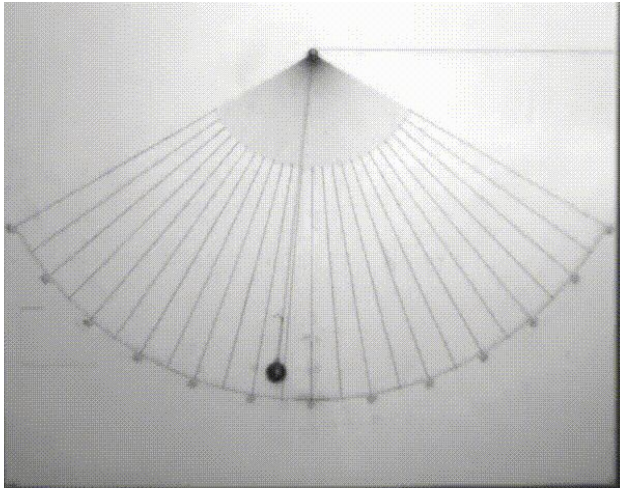
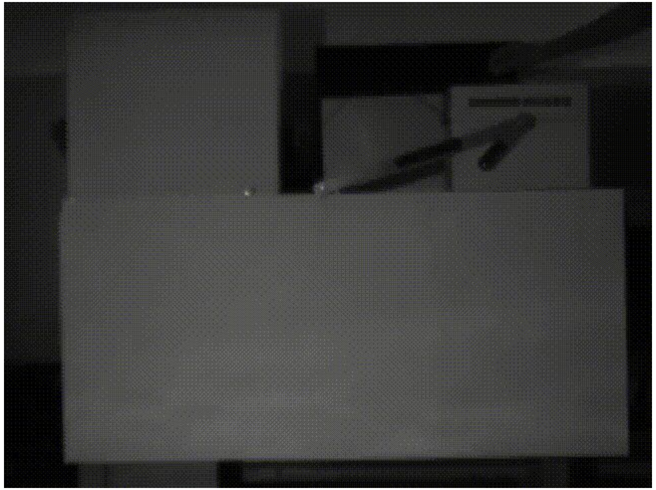
Ordem e Caos

Criação de modelo matemático do pêndulo simples e o estudo de sistemas caóticos

Tutor: Simão Meneses João
Integrantes: João Vítor Foresti, Nethele Rodrigues, Gustavo Q., Jéssica Freitas



Pêndulo Simples, solto a 10º de inclinação



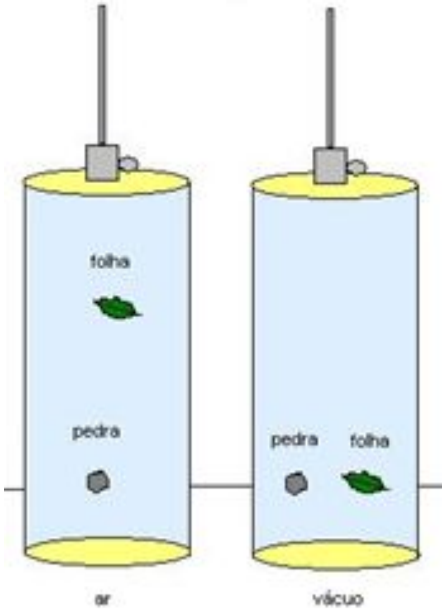
Pêndulo Duplo, um exemplo de sistema caótico

Contexto Histórico dos Modelos de Queda Livre

- **Aristóteles (384 a.c. - 822 a.c.):**
  O tempo de queda depende da natureza material do corpo, e os materiais tendem a aproximar-se de seus iguais. Ex: fogo sobe para o Sol.

- **Galileu (1564 - 1642):**
  O tempo de queda independe da massa (ou natureza) do corpo, ao analisar o sistema sem resistência do ar.
  A cada intervalo de tempo, a distância percorrida por intervalo aumenta.
  Logo, o movimento possui uma aceleração e há uma proporcionalidade entre a distância e o quadrado do tempo.

$$d \,\alpha\, t^2$$



Fonte: if.ufrgs.br

Contexto Histórico dos Modelos de Queda Livre

- **Isaac Newton (1643 - 1727):**
Desenvolveu a teoria de Galileu, utilizando sua 2ª Lei e sua Lei da Gravitação Universal, foi capaz de matematizar a aceleração descrita pelo antecessor, formulando a *aceleração da gravidade*, que rege a estabilidade dos astros no universo.

$$F_{res} = ma$$

$$F_g = \frac{GMm}{d^2}$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{GM}{d^2}$$

g = aceleração da gravidade
G = constante gravitacional
M = massa do corpo
d = distância até o centro de massa

- **Albert Einstein (1879 - 1955):**
Por meio da Relatividade Geral, reformulou o conceito de gravidade como uma curvatura no espaço-tempo, solucionando falhas no modelo newtoniano.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Contexto Histórico dos Modelos de Queda Livre

- **Mas, por que estudar os modelos históricos de queda livre?**
  Há diversos modelos base se analisar um experimento, estudamos alguns para definirmos qual utilizaríamos em nosso projeto. A queda livre serviu como parâmetro comum de análise para que se polisse o movimento uniformemente acelerado ao longo do tempo, tal qual é a base utilizada para o estudo e as equações de pêndulos, justificando, assim, o estudo de suas formulações.

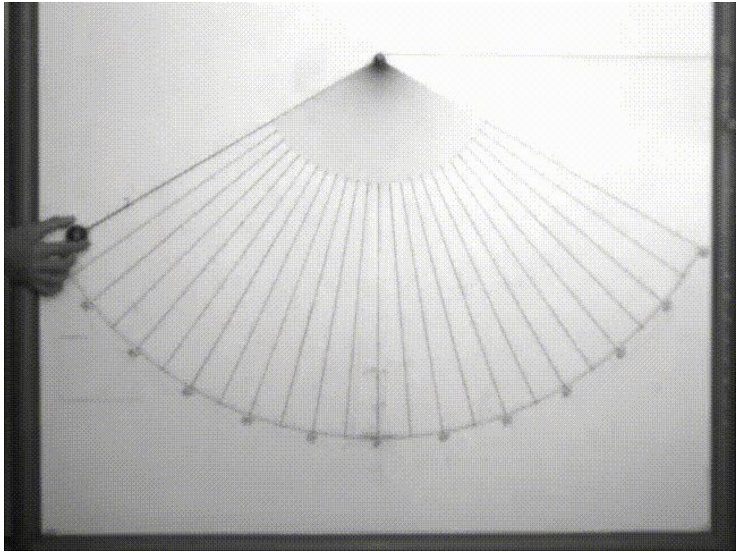
- Com a evolução das descobertas, os modelos de análise vão ficando cada vez mais completos e mais específicos, porém, simultaneamente, mais complexos.

- Modelo escolhido: newtoniano.

- Justificativa: completo suficiente para nosso trabalho e menos complicado do que o de Einstein.

Sistemas não caóticos

- ➔ Sabendo aproximadamente o presente podemos prever aproximadamente o futuro
- ➔ Exemplo: Pêndulo Simples

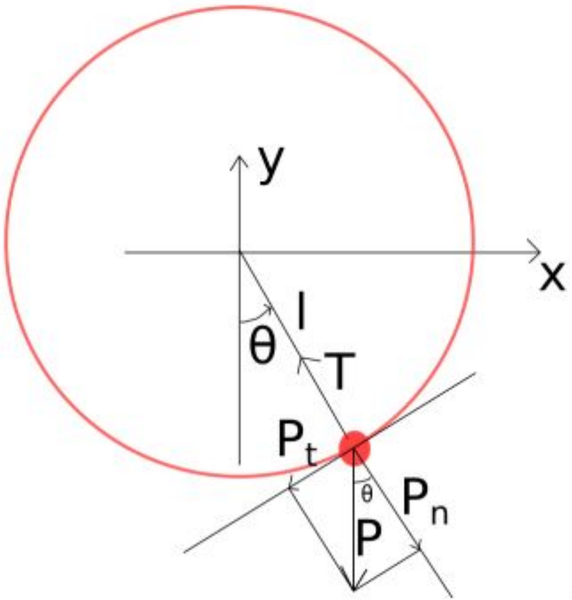


Modelo de Newton para o Pêndulo Simples

- Será usado o modelo de Newton para prever matematicamente o movimento de um pêndulo simples.

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$$

- Serão desprezadas eventuais perdas energéticas, e o fio será considerado ideal (inextensível e com massa desprezível)



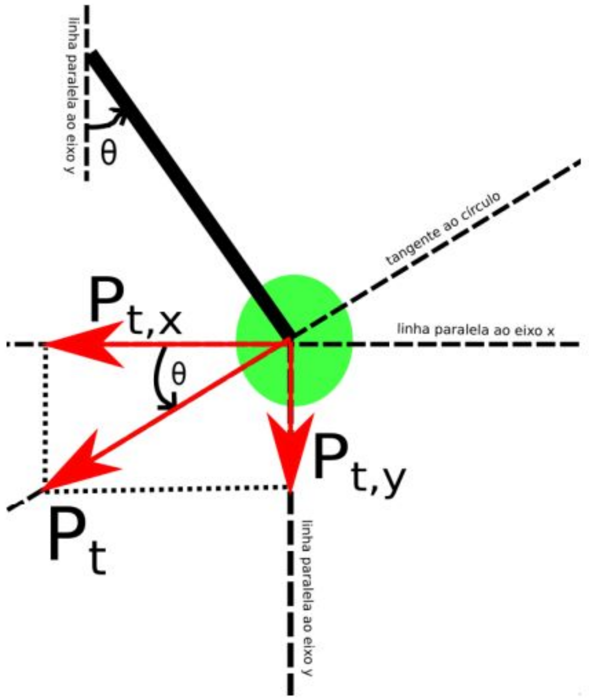
Variáveis importantes: L (comprimento do fio), θ (ângulo inicial), ω (velocidade angular inicial), g (aceleração de gravidade)

Montando as equações de posição:

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell \sin(\theta(t)) \\ y(t) &= -\ell \cos(\theta(t)) \end{aligned}$$

Derivando duas vezes:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= v_x'(t) = -\ell \sin(\theta(t)) [\theta'(t)]^2 + \ell \cos(\theta(t)) \theta''(t) \\ a_y(t) &= v_y'(t) = \ell \cos(\theta(t)) [\theta'(t)]^2 + \ell \sin(\theta(t)) \theta''(t) \end{aligned}$$



Com algebrismo, acabamos com a seguinte equação diferencial:

$$\theta''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta(t))$$

Essa equação diferencial é muito complicada para ser resolvida analiticamente. Usaremos de duas ferramentas diferentes:

Caso 1: Faremos uma aproximação para pequenos ângulos (até 10º), tal que:

$$\sin\left(\theta\left(t\right)\right) \approx \theta\left(t\right).$$

O que implica: (para $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$)

$$\theta''\left(t\right) = -\omega_0^2 \theta\left(t\right)$$

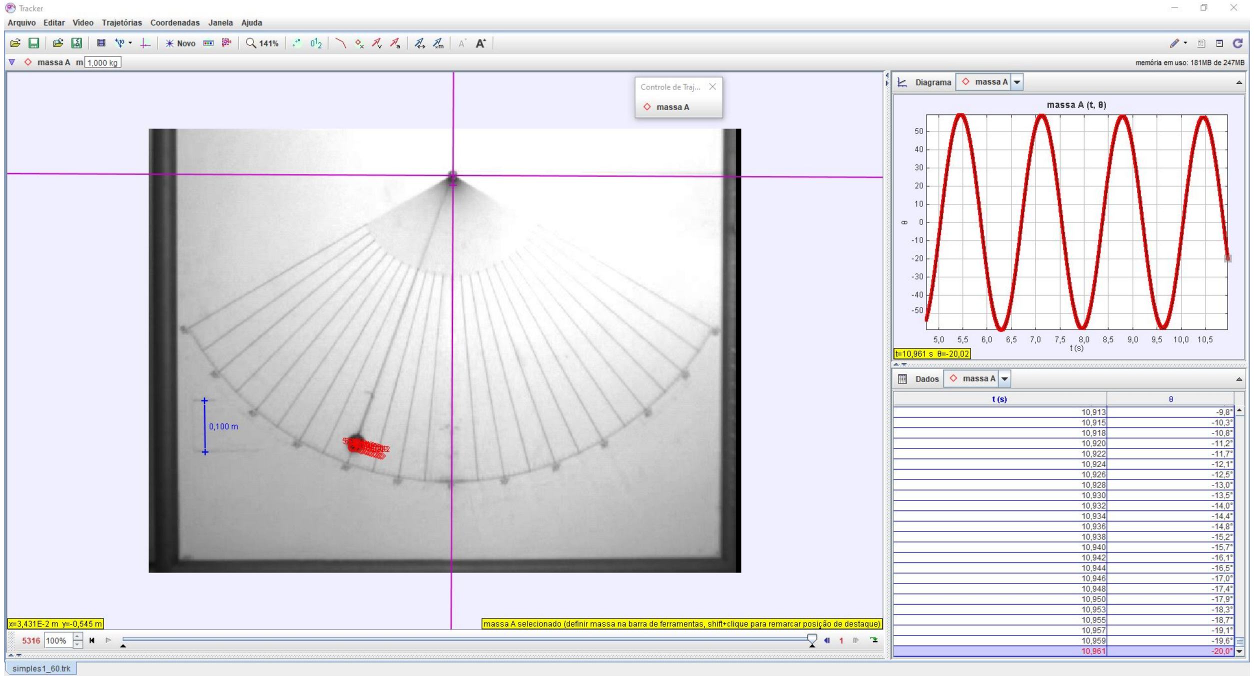
Caso 2: Usaremos o python para resolver a equação sem aproximar, e assim plotar o gráfico para esse modelo teórico;

Iremos comparar esses dois modelos com o experimental.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Importar dados
dados = np.loadtxt("simples2_60.txt")
tempos  = dados[:,0]
angulos = dados[:,1]

# Condições iniciais
t0 = 3.37 - 0.15
theta = -60.0/180*np.pi
omega = 0.0

# Parâmetros do sistema
l = 0.61
g = 9.8
w0 = np.sqrt(g/l)

N = 100000
delta = 0.0001

tempos_teor = []
angulos_teor = []

for i in range(N):
    t = i*delta + t0

    omega_velho = omega
    omega = omega - delta*w0**2*np.sin(theta)
    theta = theta + delta*omega_velho

    tempos_teor.append(t)
    angulos_teor.append(theta)

plt.title("simples2_60.txt")
plt.plot(tempos_teor, angulos_teor, label="teorico")
plt.plot(tempos, angulos*np.pi/180, label="experimento")
plt.xlabel("tempo (s)")
plt.ylabel("angulo (radianos)")
plt.legend()
plt.show()
```

Modelo Experimental

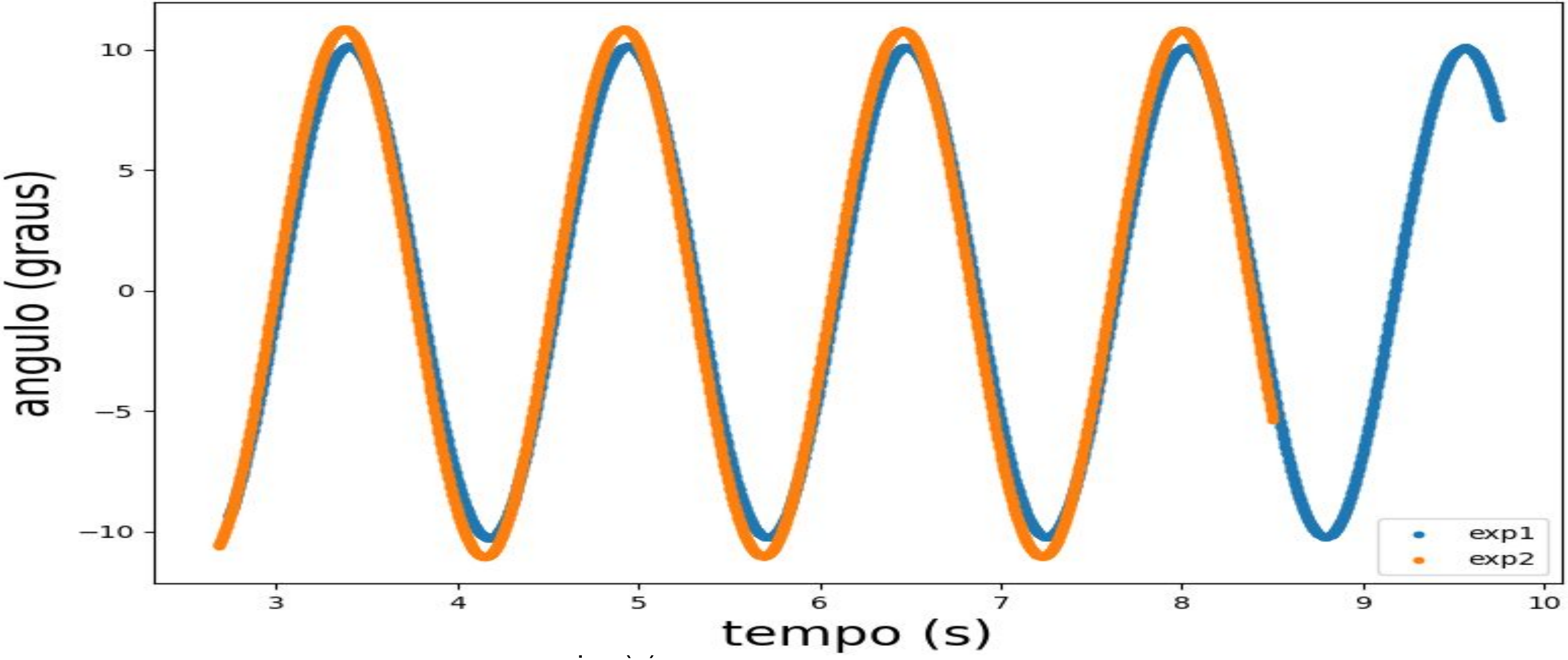
- ➔ Foi usado o programa Tracker para coletar dados de um experimento real



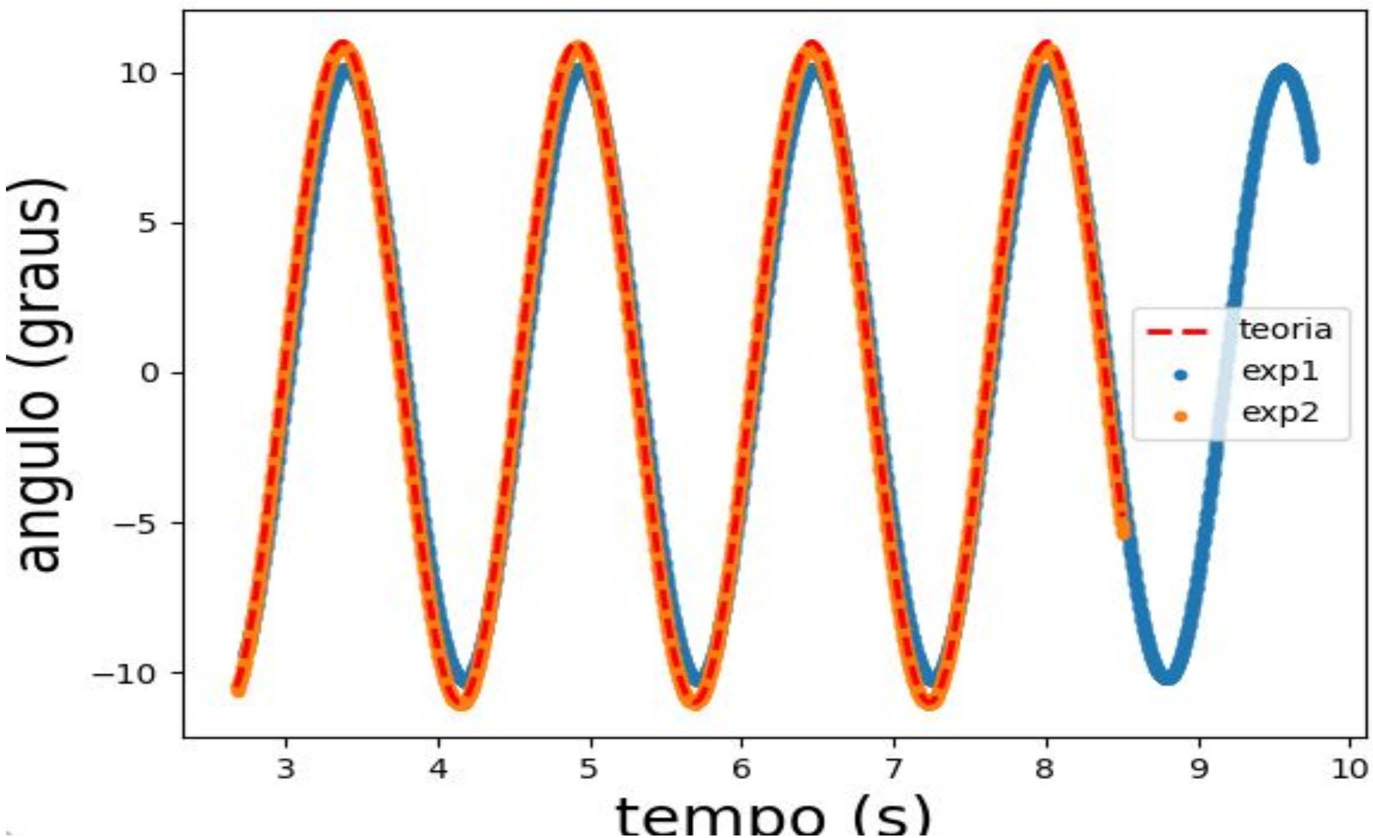
Na imagem, está sendo rastreado o pêndulo solto a 60º graus de inclinação.

Caso 1

- ➔ Foram usados dois experimentos de pêndulos solto a 10º (em que a aproximação é válida)
- ➔ Observações:



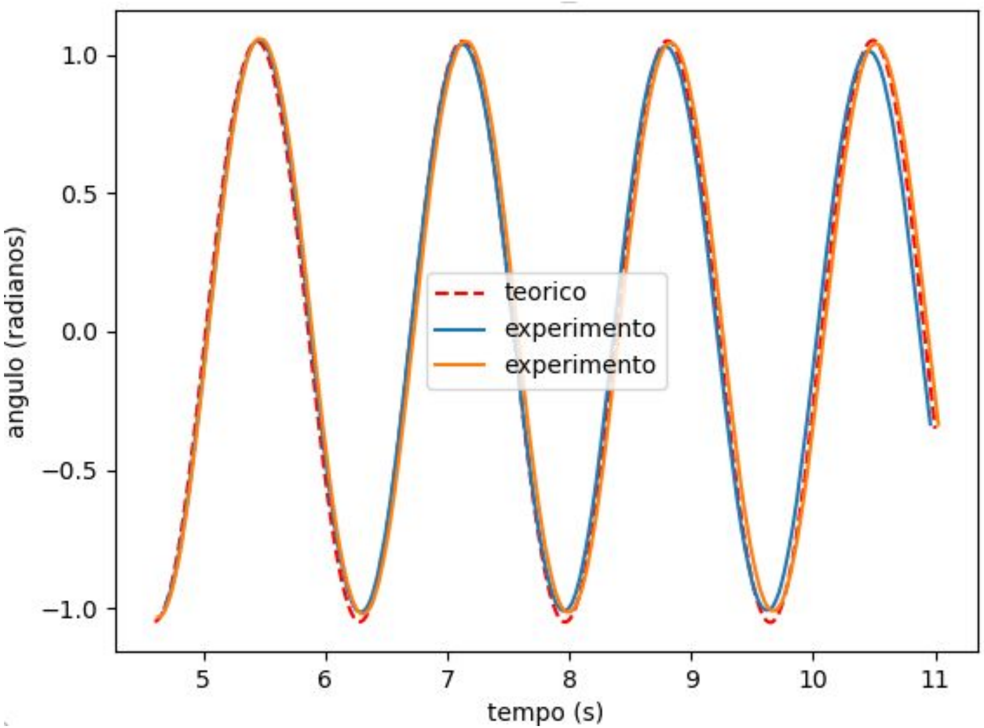
Comparação com o modelo




```python
# Condições iniciais
t0 = 4.1
theta = -10.8/180*np.pi
omega = 0.0

# Parâmetros do sistema
l = 0.585
g = 9.8
w0 = np.sqrt(g/l)

N = 60000
delta = 0.0001

tempos_teor = []
angulos_teor = []

for i in range(N):
    t = i*delta + t0

    omega_velho = omega
    omega = omega - delta*w0**2*theta
    theta = theta + delta*omega_velho

    tempos_teor.append(t)
    angulos_teor.append(theta)
```

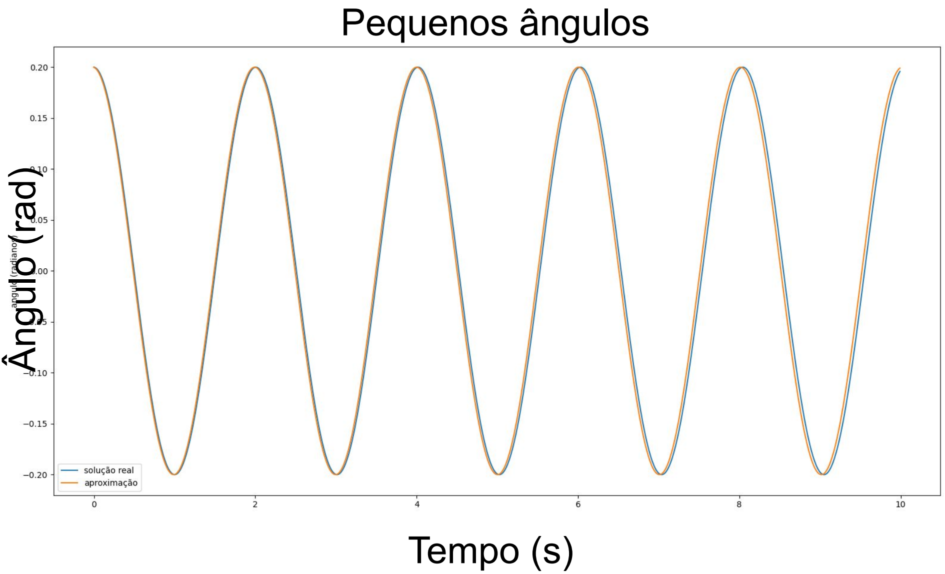
Caso 2

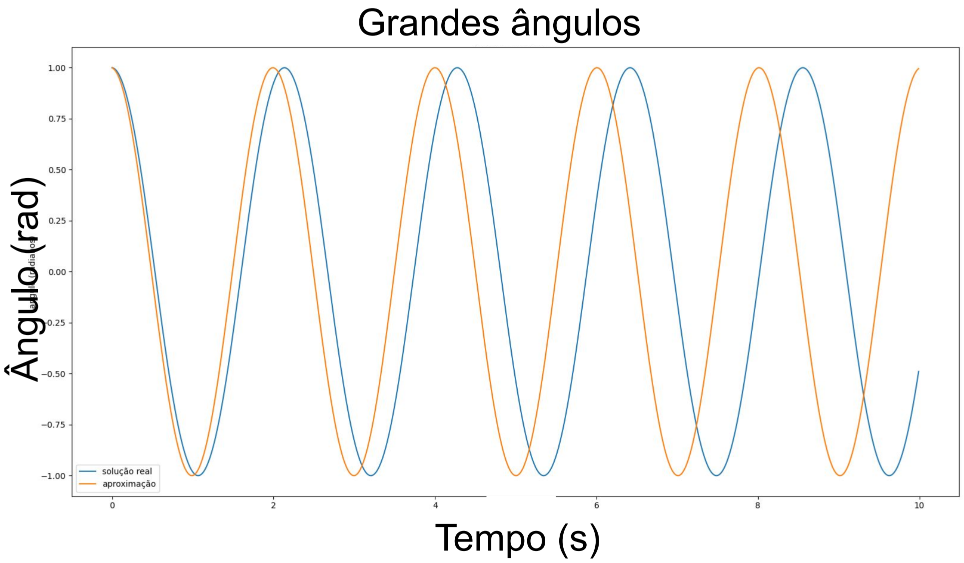
- ➔ Sem usar a aproximação anterior, comparamos com os dados do modelo experimental (no caso, um pêndulo solto a 60º).
- ➔ Observações




```python
# Condições iniciais
t0 = 3.37 - 0.15
theta = -60.0/180*np.pi
omega = 0.0

# Parâmetros do sistema
l = 0.61
g = 9.8
w0 = np.sqrt(g/l)

N = 100000
delta = 0.0001

tempos_teor = []
angulos_teor = []

for i in range(N):
    t = i*delta + t0

    omega_velho = omega
    omega = omega - delta*w0**2*np.sin(theta)
    theta = theta + delta*omega_velho

    tempos_teor.append(t)
    angulos_teor.append(theta)
```

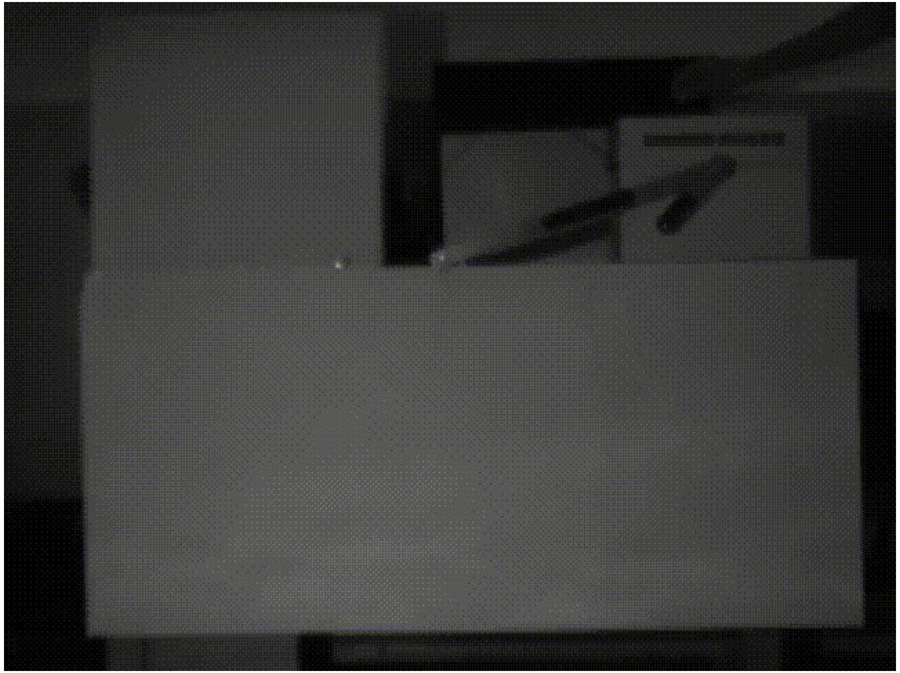
Comparação entre os dois modelos teóricos





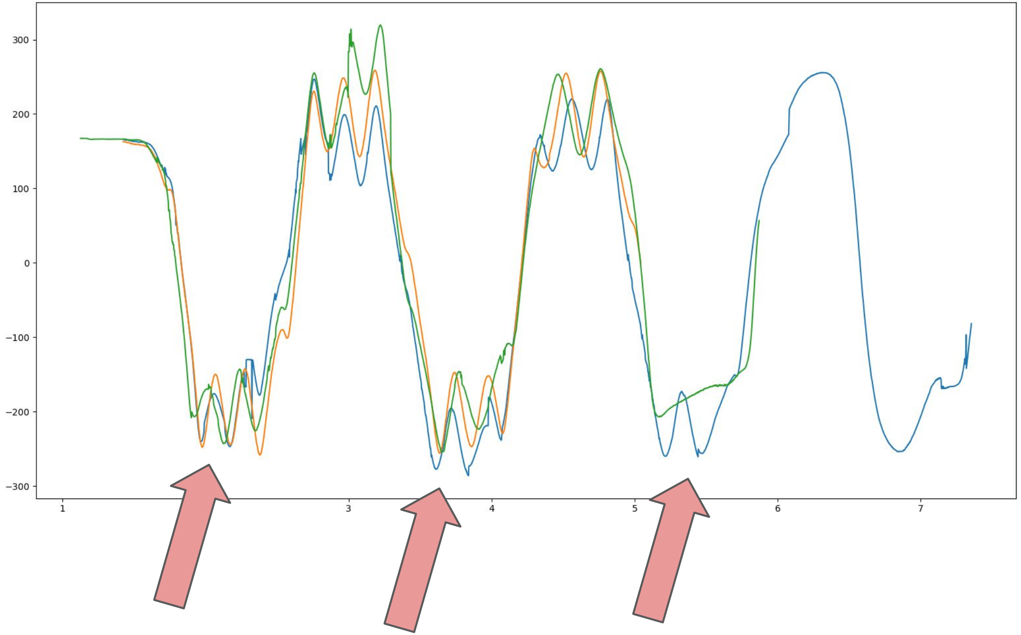
Sistemas Caóticos

- ➔ Um sistema caótico é extremamente sensível às condições iniciais
- ➔ Sabendo aproximadamente o presente, NÃO podemos prever aproximadamente o futuro
- ➔ Exemplos: Metereologia (Fluidos, em regime de turbulência) e Pêndulo Duplo



Pêndulo Duplo

Comparação entre três experimentos com pêndulo duplo



Atrator de Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

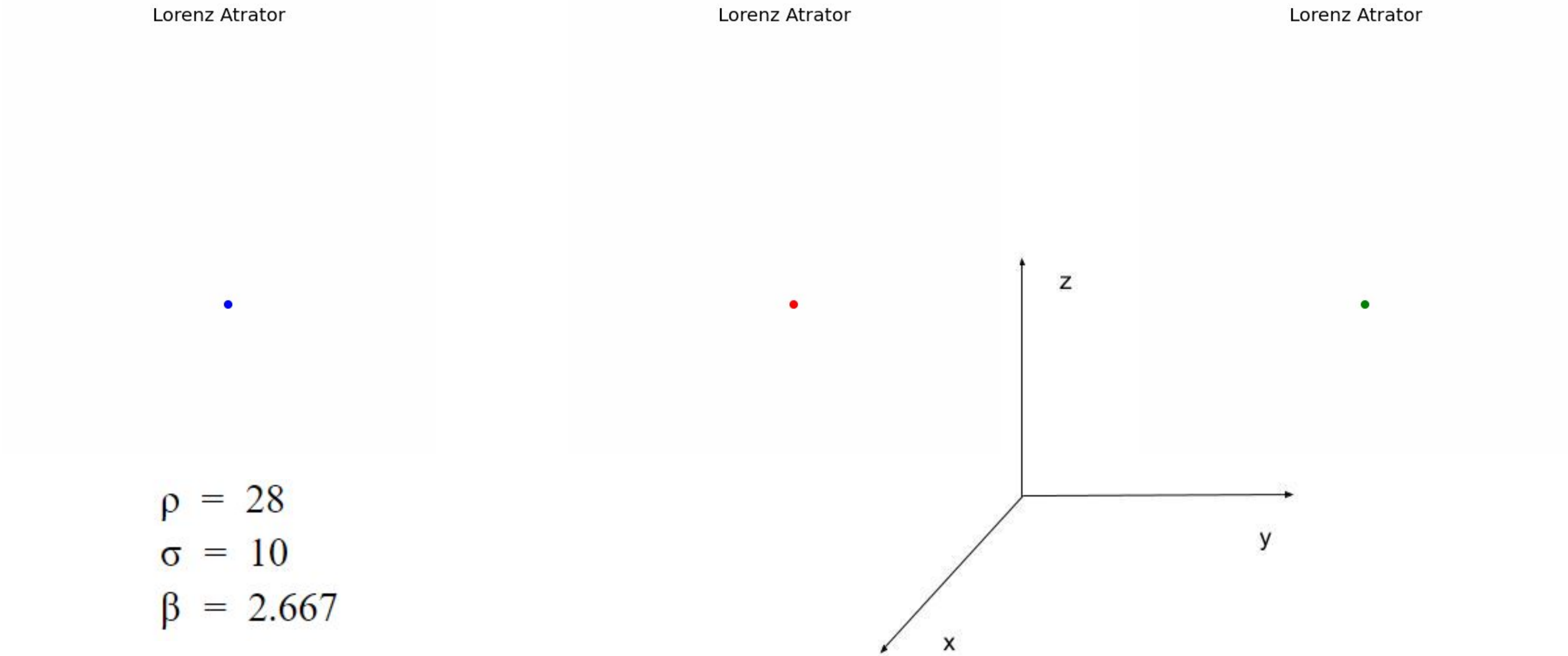
O parâmetro σ é denominado número de Prandtl,

já ρ é usualmente chamado de número de Rayleigh.

Para valores de ρ iguais a 28, o sistema apresenta um

comportamento caótico.

Atrator de Lorenz



$$\rho = 28$$
$$\sigma = 10$$
$$\beta = 2.667$$

Mapa Logístico/Populacional

$$x_{n+1} = r x_n \left(1 - x_n\right)$$

- ➔ Como essa equação de recorrência pode representar uma dinâmica populacional?
- ➔ r - taxa de crescimento vegetativo
- ➔ O que acontece ao variar r?

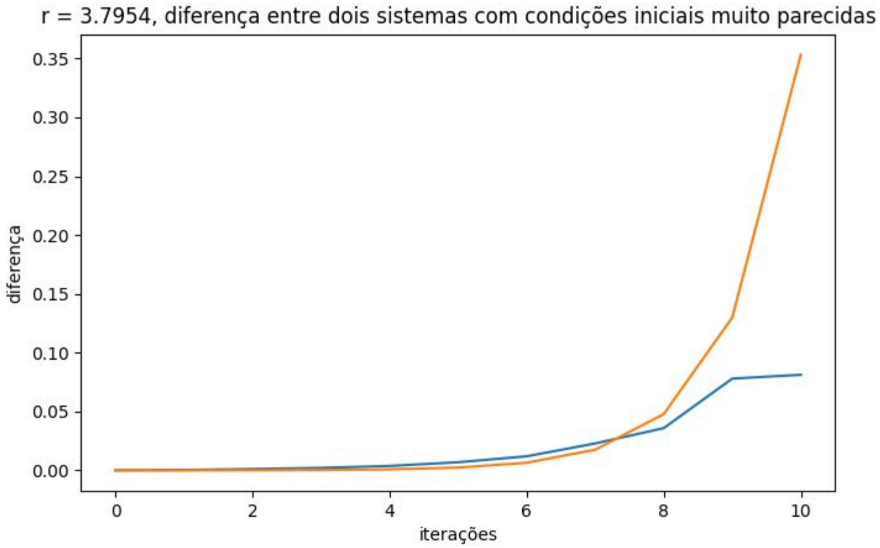
Expoente de Lyapunov

- Uma forma de medir o quão rápido os sistemas caóticos divergem.
- Para um sistema caótico temos:

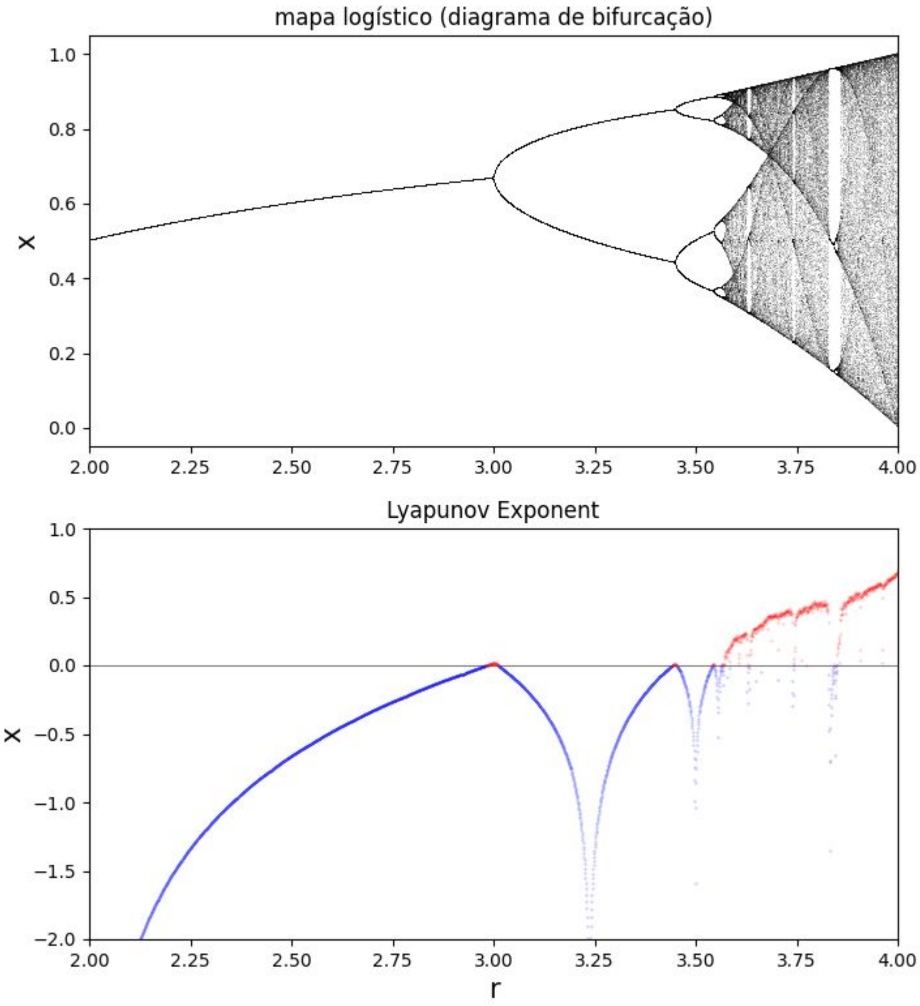
$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\lambda t}$$

$\Delta x_0 =$ diferença inicial entre as condições iniciais de 2 sistemas

$\Delta x(t) =$ distância entre 2 funções em função do tempo



$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\lambda t}$$



Considerações Finais

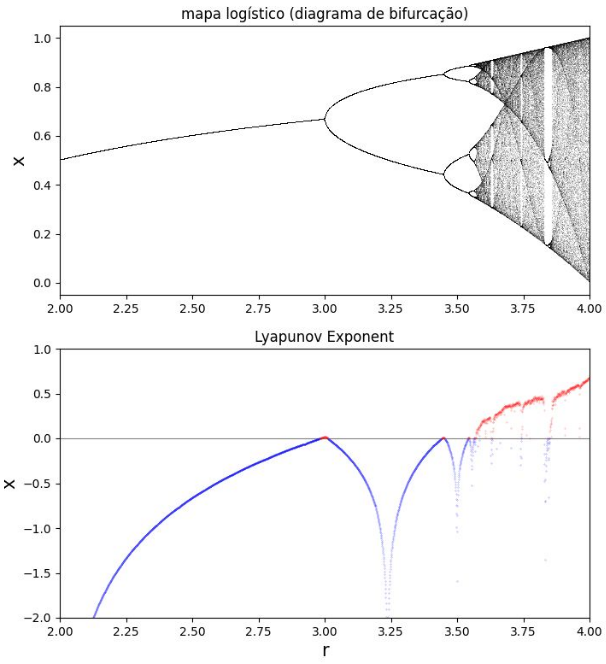
ORDEM **vs** **CAOS**

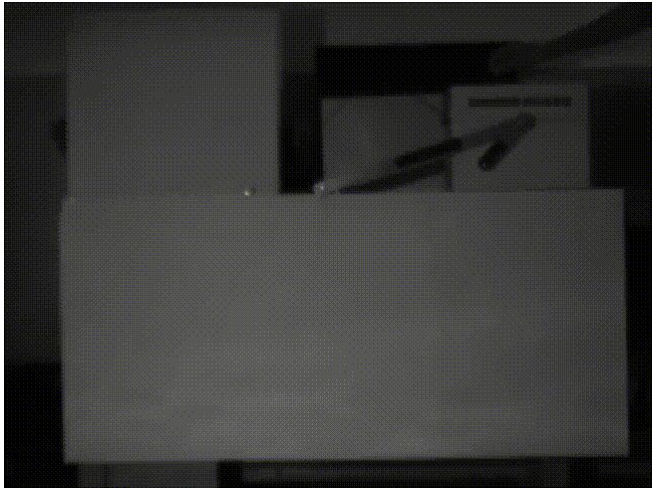
"Sabendo aproximadamente o presente **podemos** prever aproximadamente o futuro"

"Sabendo aproximadamente o presente **não podemos** prever aproximadamente o futuro"

- Resultados de experimentos com condições iniciais semelhantes

Dúvidas?


mapa logístico (diagrama de bifurcação)
x
r
Lyapunov Exponent
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
2.00
2.25
2.50
2.75
3.00
3.25
3.50
3.75
4.00



Referências

- Os gráficos e gifs foram feitos pelo próprio grupo.
- Os dados utilizados foram providos pelo tutor, Simão Meneses João.