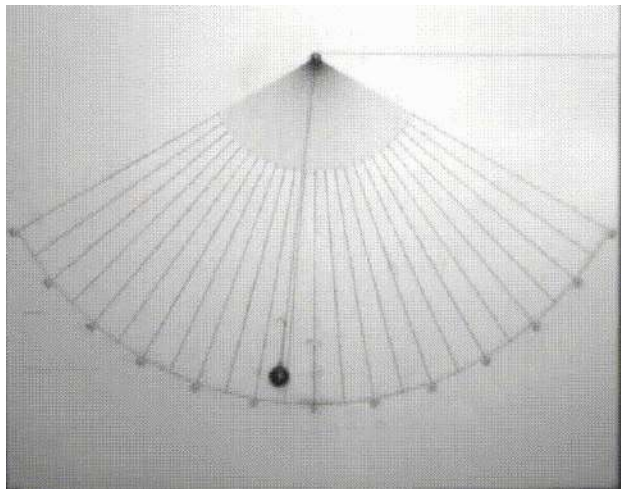


Ordem e Caos

Criação de modelo matemático do pêndulo simples e o estudo de sistemas caóticos

Tutor: Simão Meneses João

Integrantes: João Vítor Foresti, Nethelle Rodrigues, Gustavo Q., Jéssica Freitas



Pêndulo Simples, solto a 10° de inclinação



Pêndulo Duplo, um exemplo de sistema caótico

Contexto Histórico dos Modelos de Queda Livre

- **Aristóteles (384 a.c. - 822 a.c.):**

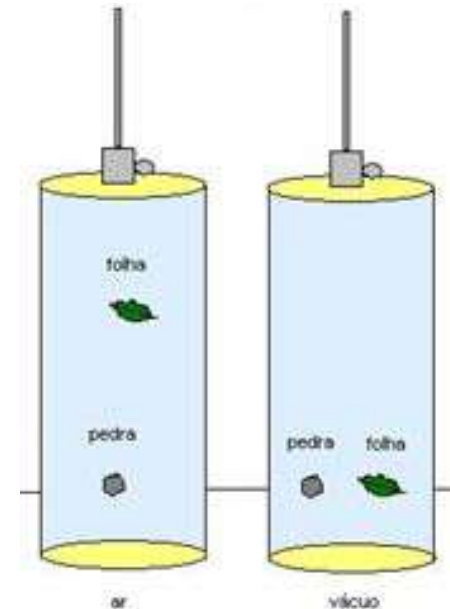
O tempo de queda depende da natureza material do corpo, e os materiais tendem a aproximar-se de seus iguais. Ex: fogo sobe para o Sol.

- **Galileu (1564 - 1642):**

O tempo de queda independe da massa (ou natureza) do corpo, ao analisar o sistema sem resistência do ar. A cada intervalo de tempo, a distância percorrida por intervalo aumenta.

Logo, o movimento possui uma aceleração e há uma proporcionalidade entre a distância e o quadrado do tempo.

$$d \propto t^2$$



Contexto Histórico dos Modelos de Queda Livre

- **Isaac Newton (1643 - 1727):**

Desenvolveu a teoria de Galileu, utilizando sua 2ª Lei e sua Lei da Gravitação Universal, foi capaz de matematizar a aceleração descrita pelo antecessor, formulando a *aceleração da gravidade*, que rege a estabilidade dos astros no universo.

$$F_{res} = ma$$

$$F_g = \frac{GMm}{d^2}$$



$$g = \frac{GM}{d^2}$$

g = aceleração da gravidade

G = constante gravitacional

M = massa do corpo

d = distância até o centro de massa

- **Albert Einstein (1879 - 1955):**

Por meio da Relatividade Geral, reformulou o conceito de gravidade como uma curvatura no espaço-tempo, solucionando falhas no modelo newtoniano.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Contexto Histórico dos Modelos de Queda Livre

- **Mas, por que estudar os modelos históricos de queda livre?**

Há diversos modelos base se analisar um experimento, estudamos alguns para definirmos qual utilizaríamos em nosso projeto. A queda livre serviu como parâmetro comum de análise para que se polisse o movimento uniformemente acelerado ao longo do tempo, tal qual é a base utilizada para o estudo e as equações de pêndulos, justificando, assim, o estudo de suas formulações.

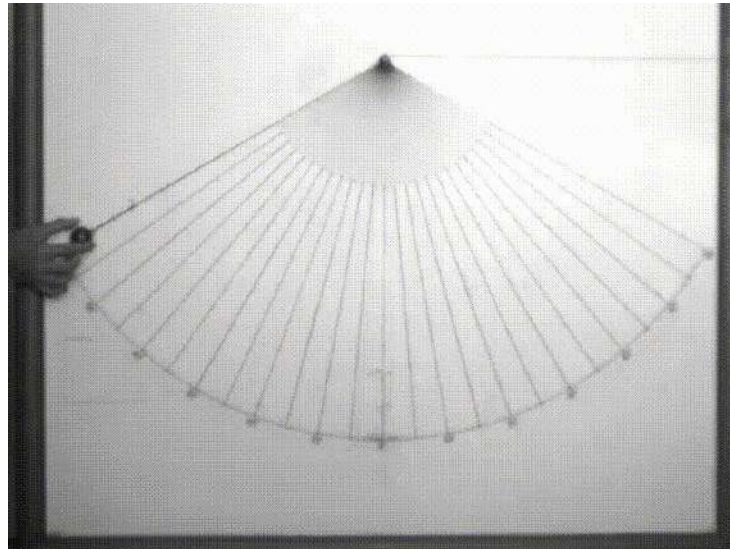
- Com a evolução das descobertas, os modelos de análise vão ficando cada vez mais completos e mais específicos, porém, simultaneamente, mais complexos.



- Modelo escolhido: newtoniano.
- Justificativa: completo suficiente para nosso trabalho e menos complicado do que o de Einstein.

Sistemas não caóticos

- Sabendo aproximadamente o presente podemos prever aproximadamente o futuro
- Exemplo: Pêndulo Simples

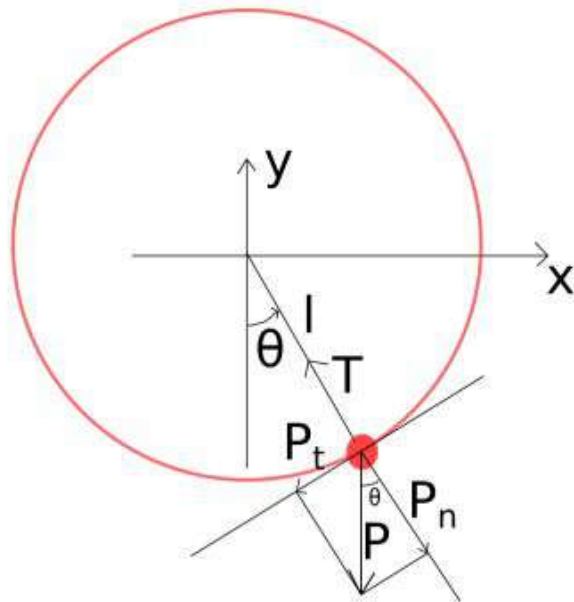


Modelo de Newton para o Pêndulo Simples

- Será usado o modelo de Newton para prever matematicamente o movimento de um pêndulo simples.

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \vec{a}$$

- Serão desprezadas eventuais perdas energéticas, e o fio será considerado ideal (inextensível e com massa desprezível)



Variáveis importantes: L (comprimento do fio), θ (ângulo inicial), ω (velocidade angular inicial), g (aceleração de gravidade)

Montando as equações de posição:

$$x(t) = l \sin(\theta(t))$$

$$y(t) = -l \cos(\theta(t))$$

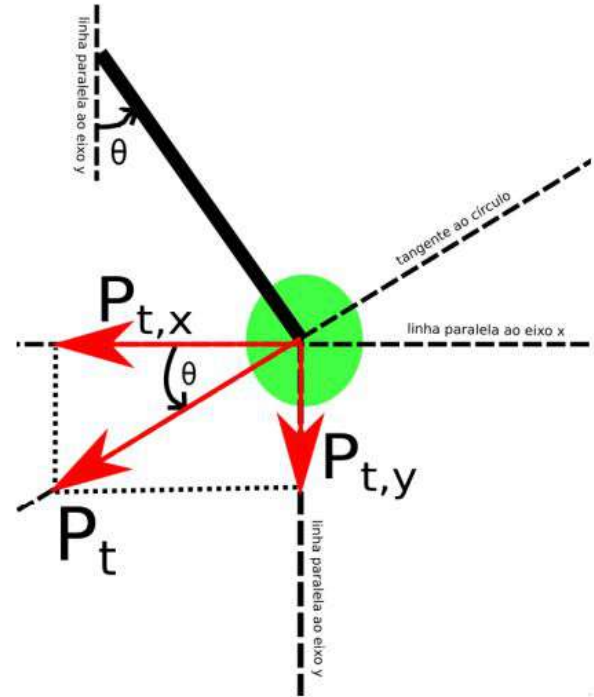
Derivando duas vezes:

$$a_x(t) = v'_x(t) = -l \sin(\theta(t)) [\theta'(t)]^2 + l \cos(\theta(t)) \theta''(t)$$

$$a_y(t) = v'_y(t) = l \cos(\theta(t)) [\theta'(t)]^2 + l \sin(\theta(t)) \theta''(t)$$

Com algebrismo, acabamos com a seguinte equação diferencial:

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t))$$



Essa equação diferencial é muito complicada para ser resolvida analiticamente.

Usaremos de duas ferramentas diferentes:

Caso 1: Faremos uma aproximação para pequenos ângulos (até 10°), tal que:

$$\sin(\theta(t)) \approx \theta(t).$$

O que implica: (para $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$)

$$\theta''(t) = -\omega_0^2 \theta(t)$$

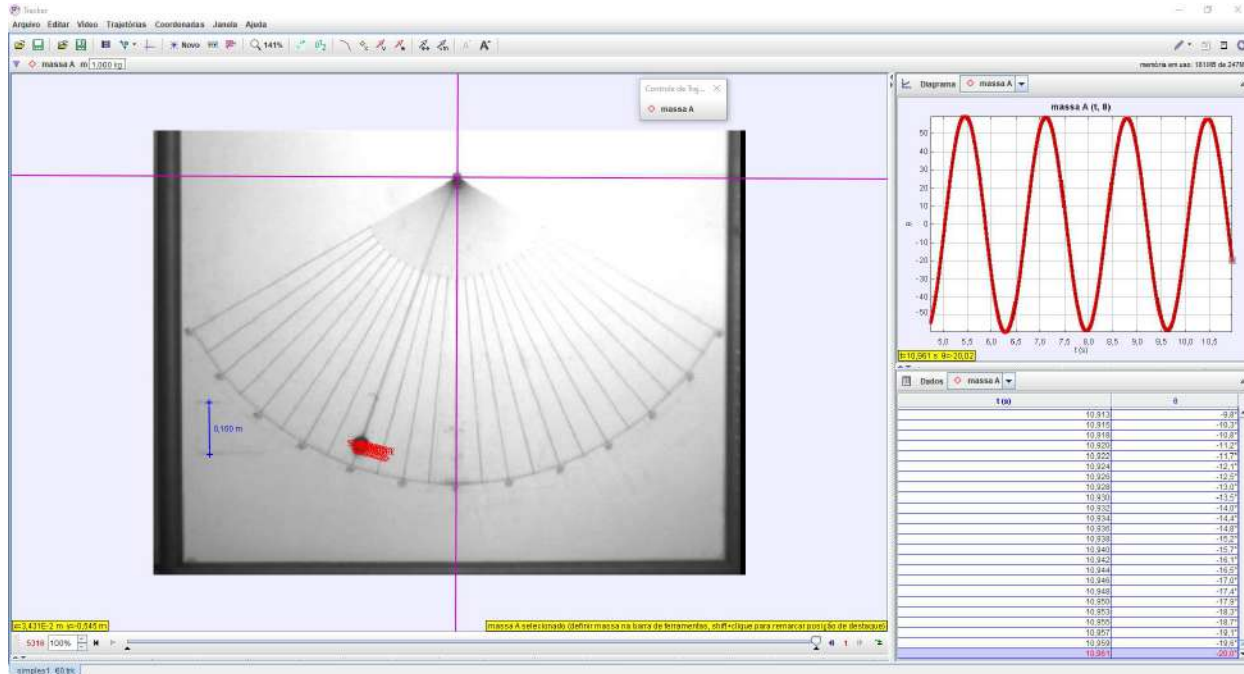
Caso 2: Usaremos o python para resolver a equação sem aproximar, e assim plotar o gráfico para esse modelo teórico;

Iremos comparar esses dois modelos com o experimental.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Importar dados
5 dados = np.loadtxt("simples2_60.txt")
6 tempos = dados[:,0]
7 angulos = dados[:,1]
8
9 # Condições iniciais
10 t0 = 3.37 - 0.15
11 theta = -60.0/180*np.pi
12 omega = 0.0
13
14 # Parâmetros do sistema
15 l = 0.61
16 g = 9.8
17 w0 = np.sqrt(g/l)
18
19 N = 100000
20 delta = 0.0001
21
22 tempos_teor = []
23 angulos_teor = []
24
25 for i in range(N):
26     t = i*delta + t0
27
28     omega_velho = omega
29     omega = omega - delta*w0**2*np.sin(theta)
30     theta = theta + delta*omega_velho
31
32     tempos_teor.append(t)
33     angulos_teor.append(theta)
34
35 plt.title("simples2_60.txt")
36 plt.plot(tempos_teor, angulos_teor, label="teorico")
37 plt.plot(tempos, angulos*np.pi/180, label="experimental")
38 plt.xlabel("tempo (s)")
39 plt.ylabel("angulo (radianos)")
40 plt.legend()
41 plt.show()
```


Modelo Experimental

→ Foi usado o programa Tracker para coletar dados de um experimento real

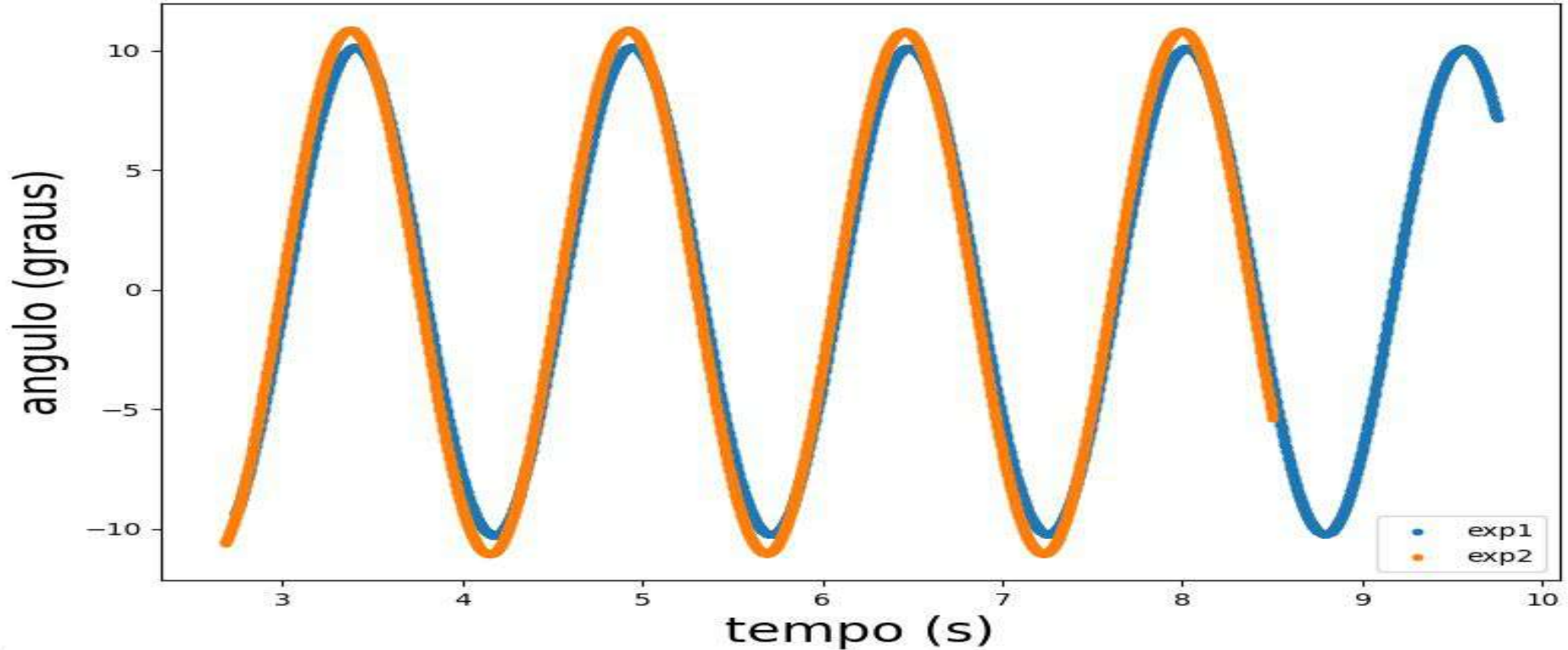


Na imagem, está sendo rastreado o pêndulo solto a 60° graus de inclinação.

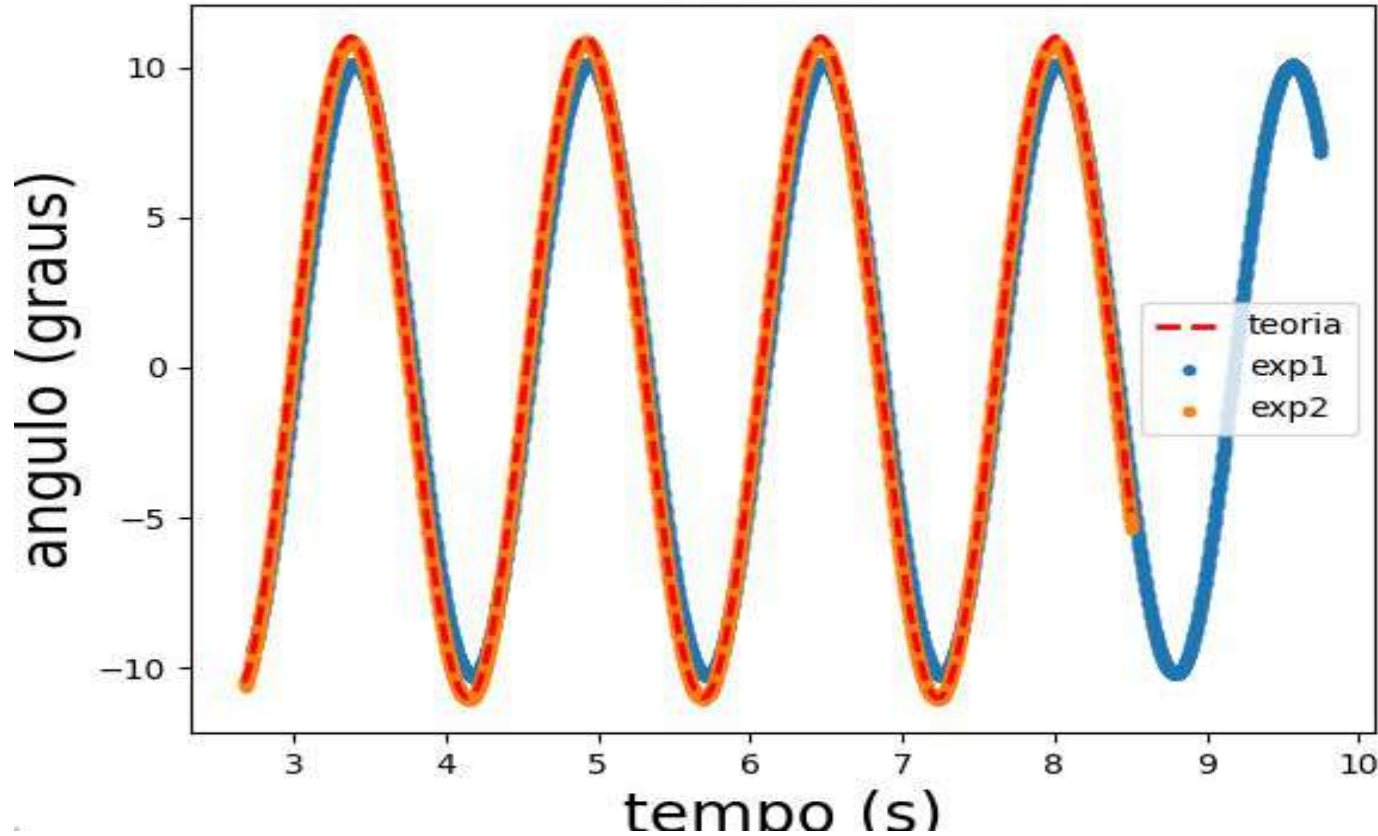
Caso 1

→ Foram usados dois experimentos de pêndulos solto a 10° (em que a aproximação é válida)

→ Observações:



Comparação com o modelo



```
# Condições iniciais
t0 = 4.1
theta = -10.8/180*np.pi
omega = 0.0

# Parâmetros do sistema
l = 0.585
g = 9.8
w0 = np.sqrt(g/l)

N = 60000
delta = 0.0001

tempos_teor = []
angulos_teor = []

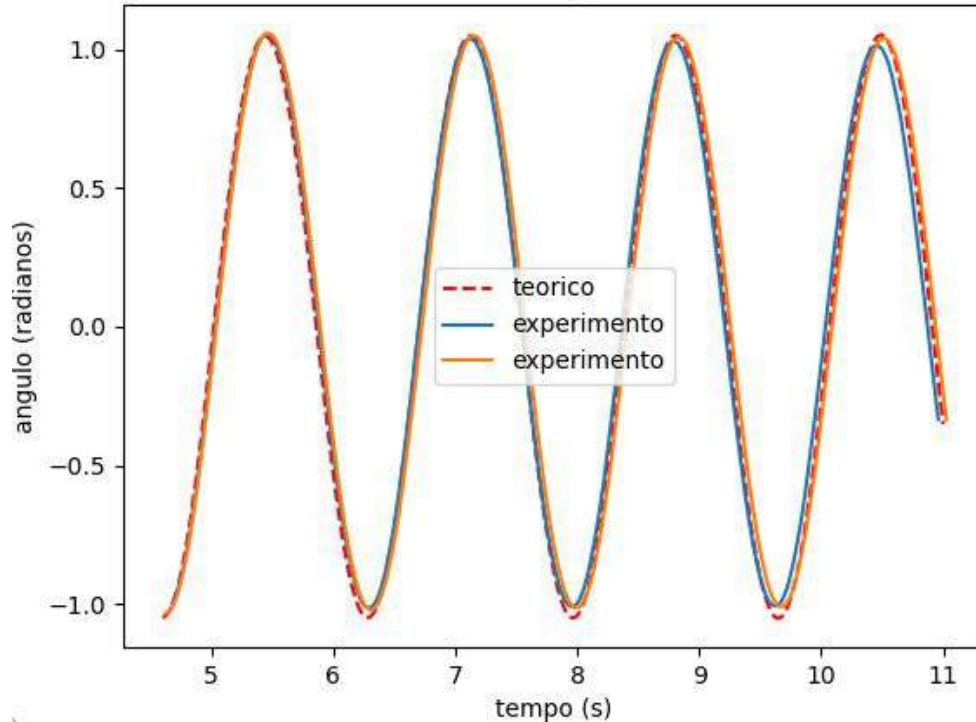
for i in range(N):
    t = i*delta + t0

    omega_velho = omega
    omega = omega - delta*w0**2*theta
    theta = theta + delta*omega_velho

    tempos_teor.append(t)
    angulos_teor.append(theta)
```

Caso 2

- Sem usar a aproximação anterior, comparamos com os dados do modelo experimental (no caso, um pêndulo solto a 60°).
- Observações



```
# Condições iniciais
t0 = 3.37 - 0.15
theta = -60.0/180*np.pi
omega = 0.0

# Parâmetros do sistema
l = 0.61
g = 9.8
w0 = np.sqrt(g/l)

N = 100000
delta = 0.0001

tempos_teor = []
angulos_teor = []

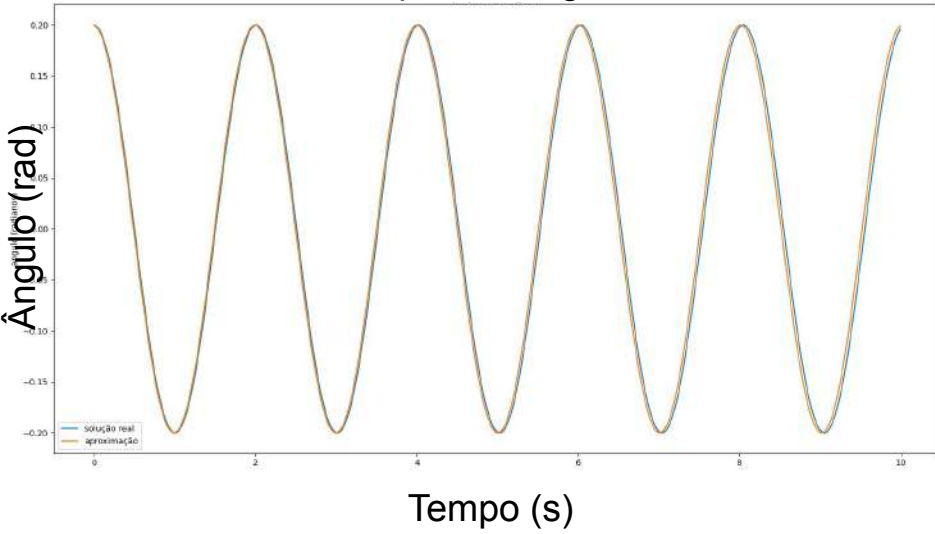
for i in range(N):
    t = i*delta + t0

    omega_velho = omega
    omega = omega - delta*w0**2*np.sin(theta)
    theta = theta + delta*omega_velho

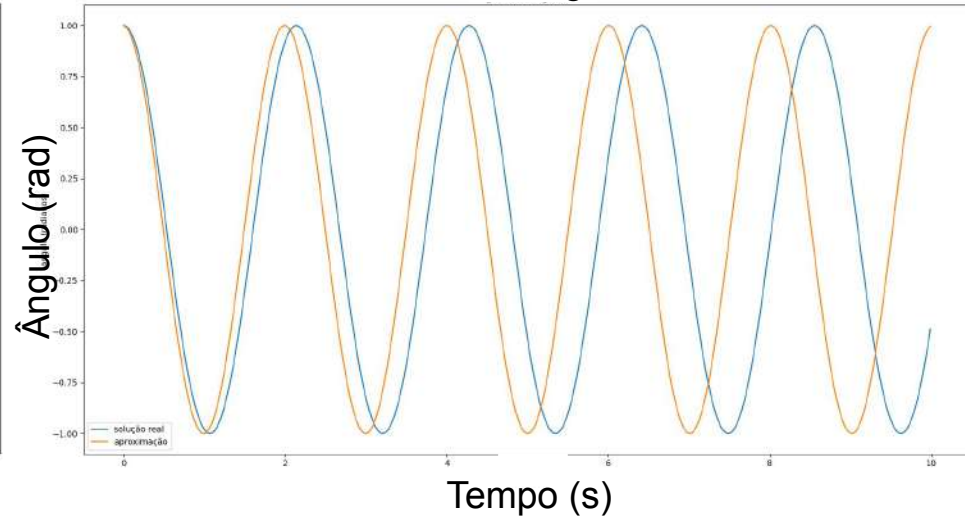
    tempos_teor.append(t)
    angulos_teor.append(theta)
```

Comparação entre os dois modelos teóricos

Pequenos ângulos

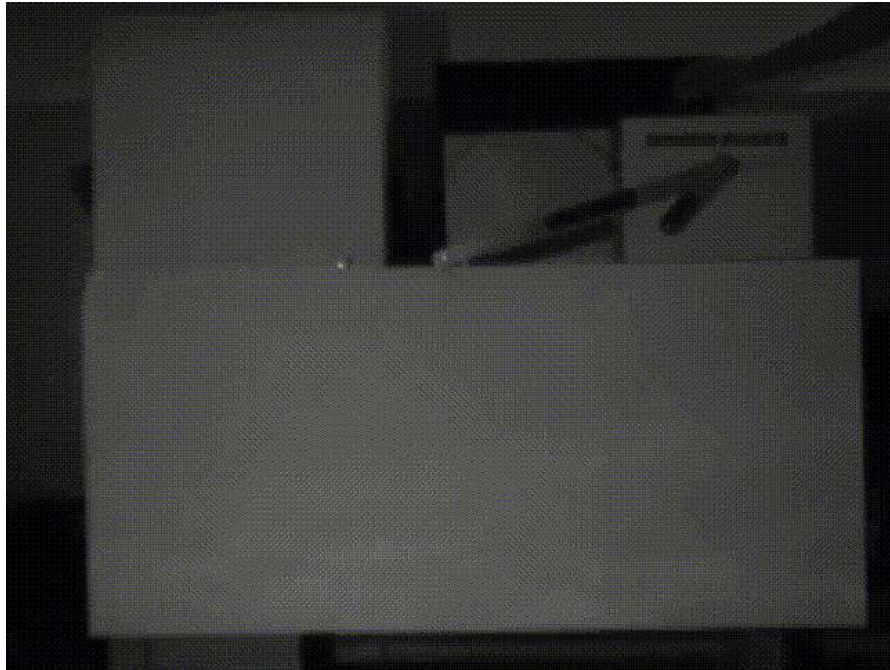


Grandes ângulos



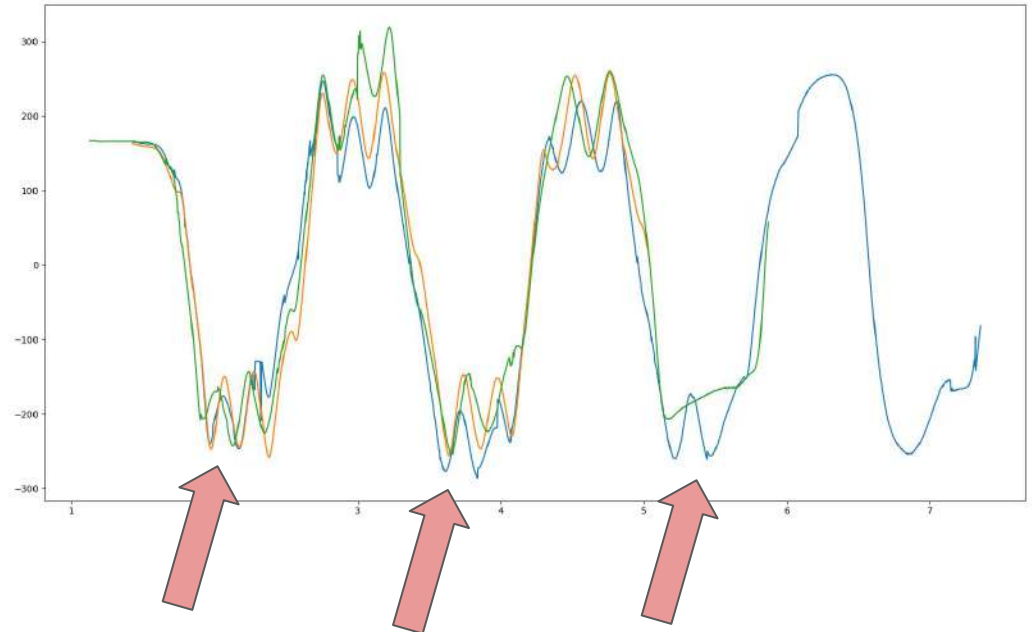
Sistemas Caóticos

- Um sistema caótico é extremamente sensível às condições iniciais
- Sabendo aproximadamente o presente, NÃO podemos prever aproximadamente o futuro
- Exemplos: Meteorologia (Fluidos, em regime de turbulência) e Pêndulo Duplo



Pêndulo Duplo

Comparação entre três experimentos com pêndulo duplo



Atrator de Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

O parâmetro σ é denominado número de Prandtl,

já ρ é usualmente chamado de número de Rayleigh.

Para valores de ρ iguais a 28, o sistema apresenta um comportamento caótico.

Atrator de Lorenz

Lorenz Atrator

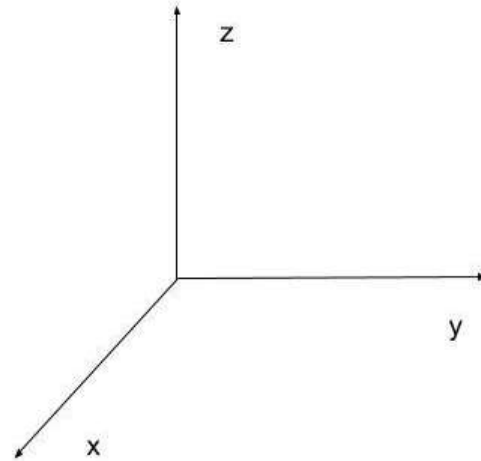


$$\begin{aligned}\rho &= 28 \\ \sigma &= 10 \\ \beta &= 2.667\end{aligned}$$

Lorenz Atrator



Lorenz Atrator



Mapa Logístico/Populacional

$$x_{n+1} = rx_n (1 - x_n)$$

- Como essa equação de recorrência pode representar uma dinâmica populacional?
- r - taxa de crescimento vegetativo
- O que acontece ao variar r ?

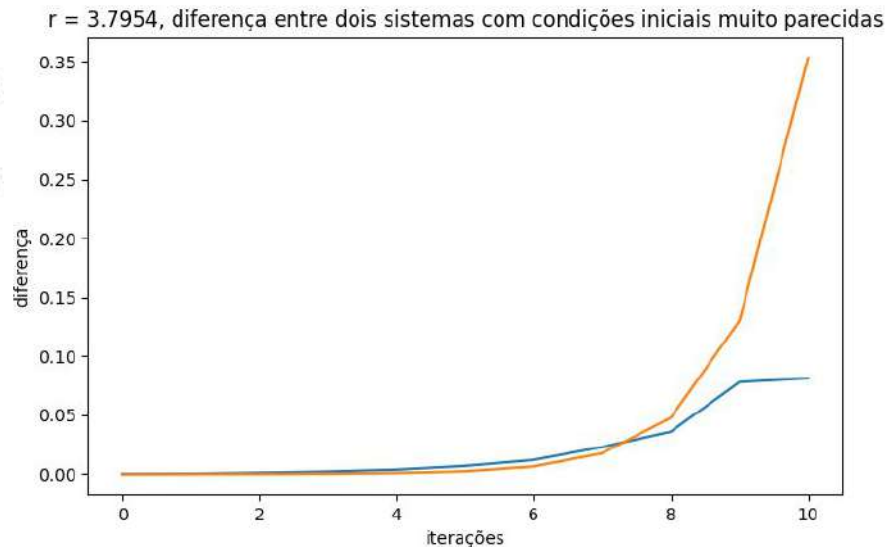
Expoente de Lyapunov

- Uma forma de medir o quão rápido os sistemas caóticos divergem.
- Para um sistema caótico temos:

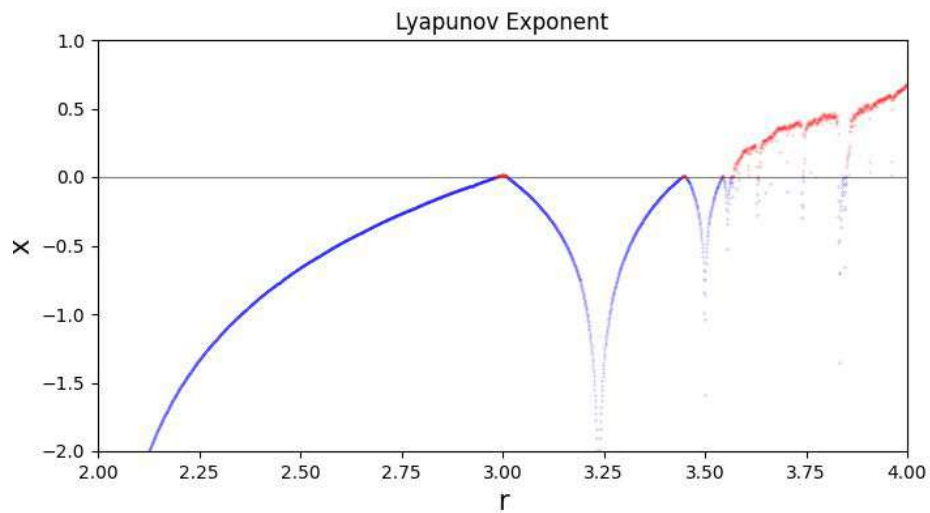
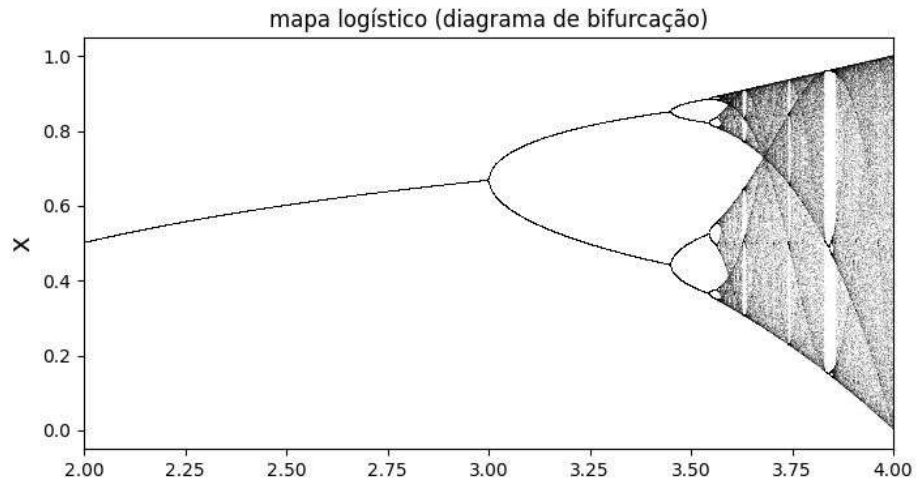
$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\lambda t}$$

Δx_0 = diferença inicial entre as condições iniciais de 2 sistemas

$\Delta x(t)$ = distância entre 2 funções em função do tempo



$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\lambda t}$$



Considerações Finais

ORDEM

vs

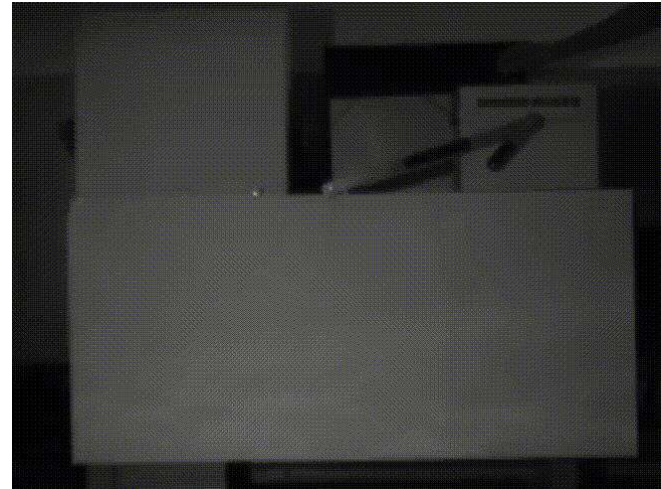
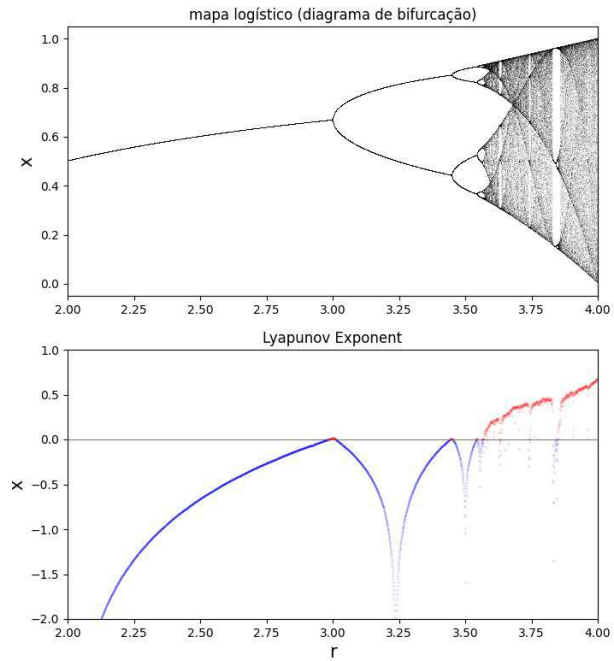
CAOS

“Sabendo aproximadamente o presente **podemos** prever aproximadamente o futuro”

“Sabendo aproximadamente o presente **não podemos** prever aproximadamente o futuro”

- Resultados de experimentos com condições iniciais semelhantes

Dúvidas?



Referências

- Os gráficos e gifs foram feitos pelo próprio grupo.
- Os dados utilizados foram providos pelo tutor, Simão Meneses João.