ICTP | Centro Internacional de Física Teórica
SAIFR | Instituto Sul-Americano para Pesquisa Fundamental

MINICURSOS PARA ENSINO MÉDIO

Números complexos – Lista 1

Professor Lucas David

1. Efetuar as operações indicadas, colocando o resultado final em forma algébrica:

a) (5 + 4i)(1 – i) + (2 + i)i

b) $(1 + 2i)^2 – (3 + 4i)$

c) (4 – 3i)(5 – i)(1 + i)

d) $(3 + 2i)^2$

e) $(1 + i)^3$

f) i^{110}

g) i^{503}

h) i^{2018}

I) $(1 – i)^{96} + (1 – i)^{97}$

2. Determinar $x, y \in \mathbb{R}$ para que se tenha:

a) 2 + 3yi = x + 9i

b) (x + yi)(3 + 4i) = 7 + 26i

c) $(x + yi)^2 = 4i$

3. Seja z = x + yi um número complexo. Dizemos que Re(z) = x, parte real de z é igual a x; Im(z) = y, parte imaginária de z é igual a y. Chamamos de conjugado deste número complexo z o seguinte complexo: $\bar{z} = x - yi$. A partir destas informações, prove que:

a) $z + \bar{z}$ = 2Re(z)

b) $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$

c) $z.\bar{z} = x^2 + y^2$

4. Coloque os seguintes números complexos na forma z = a + bi

a) $\dfrac{i^9}{4-3i}$

b) $\dfrac{1+2i}{3-i}$

c) $\dfrac{1+i}{1-i}$

d) $\dfrac{i^{11}+2i^{13}}{i^{18}-i^{37}}$

e) $\dfrac{i^3-i^2+i^{17}-i^{35}}{i^{16}-i^{13}+i^{30}}$

f) $\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$

5. Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = i$

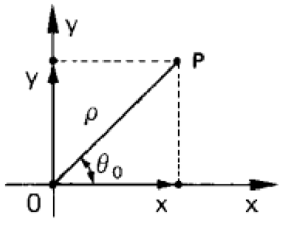
6. Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

7. Sendo $x^2 + y^2 = 1$, prove que $\dfrac{1+x+iy}{1+x-iy} = x+iy$

***8.** Provar que $\dfrac{1+\sin x + i\cos x}{1-\sin x - i\cos x} = (tg\, x + sec\, x)i$, para todo x real , $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

9. Para cada número complexo z = a + bi define-se seu módulo, $|z|$, dado por $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. A partir desta definição, prove que $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$

10. Para começarmos a vislumbrar a aplicação dos números complexos na física, é necessário representá-los sob outra forma, a chamada forma trigonométrica (ou polar). Para visualizarmos tal forma, representamos um número complexo z = x + yi no chamado plano de Argand-Gauss. O plano de Argand-Gauss é formado por um eixo *real* (x) e um eixo *imaginário* (y), como mostra a figura abaixo:



O ponto *P* é chamado de afixo do número complexo z. Perceba que a localização do afixo de z é semelhante à localização de um par ordenado em um plano cartesiano comum. Na figura, θ_0 representa aquilo que chamamos de *argumento principal* do número complexo z.

O argumento principal de z, θ_0, é tal que $\cos(\theta_0)=\frac{x}{\rho}$ e $\sin(\theta_0)=\frac{y}{\rho}$, onde $\rho=|z|$. θ_0 é chamado de argumento principal pois podem haver outros argumentos para o mesmo z, já que $\theta=\theta_0+2k\pi$, para $k\in\mathbb{Z}$. Assim, o argumento principal é tal que $0\leqslant\theta_0<2\pi$. No mais das vezes, porém, faremos referência ao argumento principal simplesmente por *argumento*. A partir do exposto, prove que um número complexo z = x + iy pode ser expresso por $z=\rho(\cos\theta+i sen\theta)$. Esta é a chamada forma trigonométrica ou polar. Usaremos preferencialmente a forma condensada, ***z = cis θ.***

11. Represente graficamente os seguintes números complexos e forneça para cada um a respectiva forma polar.

a) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

b) *– 5 – 5i*

c) $1+i\sqrt{3}$

d) *-2i*

e) *i*

f) -*i*

g) $\sqrt{3}+i$

h) 2i (1 – i)

i) i^3

***12.** Prove que $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

13. Forneça uma representação geométrica no plano de Argand-Gauss para cada um dos seguintes subconjuntos em $\mathbb{C}$:

a) $A=\{z\in\mathbb{C}, tq|z|=9\}$

b) $B=\{z\in\mathbb{C}, tq|z|\leqslant 2\}$

c) $C=\{z\in\mathbb{C}, tq\ Real(z)\geqslant 1\ e\ Imag(z)\geqslant 2\}$

14. Sejam $z_1=i$ e $z_2=\sqrt{3}+i$.

a) represente geometricamente no plano de Argand-Gauss os dois complexos;

b) calcule algebricamente $z_1 + z_2$ e forneça sua forma polar.

c) represente geometricamente o complexo $z_3 = z_1 + z_2$.

d) calcule algebricamente z_1z_2 e forneça sua forma polar.

e) represente geometricamente $z_3=z_1z_2$.

f) discuta os resultados obtidos para a soma e produto de dois números complexos. Quais conclusões podem ser tiradas?