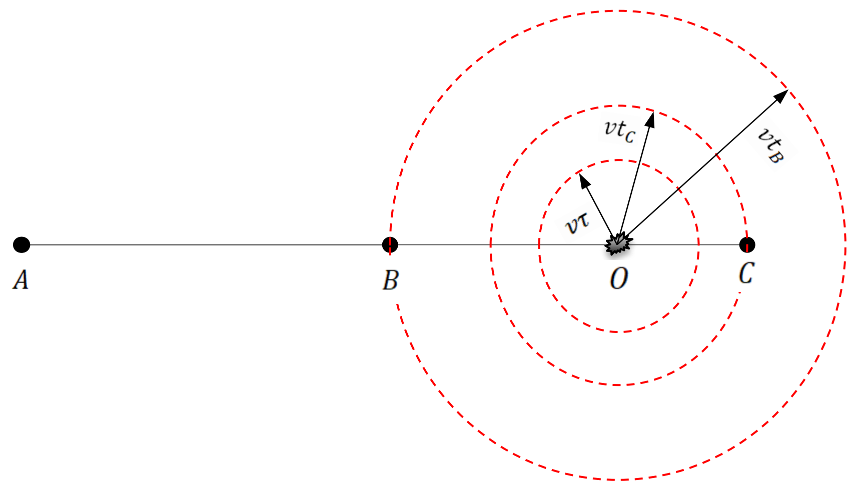
Solução do Exame Seletivo

Problema 1 (*1.1.5, O. Ya. Sávchenko, URSS, 1981*)
Três microfones, localizados numa reta nos pontos A, B e C, registram nos momentos $t_A > t_B > t_C$ o som de certa explosão ocorrida no ponto O, situado no segmento $\overline{AC}$. Considere $\overline{AB} = \overline{BC} = L$. O início do relógio não corresponde com o momento da explosão. Encontre:

a) Uma expressão para a velocidade do som.
b) O intervalo de tempo entre a explosão e o início do relógio.
c) O segmento $\overline{OA}$.

Solução: Conhecemos que o som foi registrado nos microfones que estão nos pontos A e B nos instantes de tempos t_A e t_B respectivamente, onde $t_A > t_B$, então $\overline{AB} = v(t_A - t_B)$, onde v representa a velocidade do som, ou seja, $v = \frac{L}{t_A - t_B}$.

Seja que o relógio inicia algum tempo τ após a explosão (segundo as condições do problema necessariamente $0 < \tau < t_C$), então quando o relógio inicia o som viajou uma distância $v\tau$.



Utilizando simples relações cinemáticas obtemos que $\overline{OC} - v\tau = vt_c$ e $\overline{OB} - v\tau = vt_B$, além disso, pela geometria do problema, temos que $\overline{OC} = 2L - \overline{OA}$ e $\overline{OB} = \overline{OA} - L$. Juntando as relações anteriores achamos o sistema de equações

$$2L - \overline{OA} - v\tau = vt_C,$$
$$\overline{OA} - L - v\tau = vt_B.$$

Somando as duas equações, achamos

$$L - 2v\tau = v(t_C + t_B) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{2v} - \frac{t_C + t_B}{2},$$

Onde podemos utilizar a expressão para v, achado no item anterior, logo achamos

$$\tau = \frac{t_A - 2t_B - t_C}{2}.$$

Finalmente temos que

$$\overline{OA} - L - \frac{L}{2}\left(\frac{t_A - 2t_B - t_C}{t_A - t_B}\right) = \frac{Lt_B}{t_A - t_B},$$

ou seja

$$\overline{OA} - L = \frac{L}{2}\left(\frac{t_A - t_C}{t_A - t_B}\right) \;\Rightarrow\; \overline{OA} = \frac{L}{2}\left(\frac{3t_A - 2t_B - t_C}{t_A - t_B}\right).$$

Problema 2 (*3.45, David Morin, Harvard, 2007*)
Duas bolas são lançadas do nível do chão, separadas por uma distância d. A bola da direita é disparada verticalmente com velocidade v (veja figura). Você deseja disparar simultaneamente a bola da esquerda na velocidade $\vec{u}$, para que ela colida com a bola da direita quando elas atingirem o ponto mais alto. Qual deve ser $\vec{u}$ (forneça os components horizontal e vertical)? Dado d, qual deve ser v para que a velocidade u (valor absoluto de $\vec{u}$) seja minima?

Solução 1 (Sistema de Referência Terra): O movimento da bola à esquerda pode ser descomposto de acordo com o princípio da independência do movimento (Principio de Galileo)

$$x_l = u_x t,$$
$$y_l = u_y t - \frac{gt^2}{2}.$$

onde $u_x = u\cos(\varphi)$ e $u_y = u\sin(\varphi)$. A bola à direita se move apenas na direção y, então

$$y_r = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

No ponto de encontro temos as condições $y_l = y_r$ e $x_l = d$, então da primeira condição é imediato que $u_y = v$, na segundo condição temos que $u_x = \frac{d}{t}$, onde t representa o tempo de voo até as bolas atingirem a ponto mais alto. Na bola da dieita temos que $v = gt$ (no ponto mais alto sua velocidade é nula), ou seja, que $u_x = \frac{gd}{v}$. Finalmente obtemos na forma vetorial

$$\vec{u} = (u_x, u_y) = \left(v, \frac{gd}{v}\right) \;\Rightarrow\; u = \sqrt{v^2 + \left(\frac{gd}{v}\right)^2}.$$

o ângulo de disparo será

$$\tan(\varphi) = \frac{u_y}{u_x} = \frac{v^2}{gd} \;\Rightarrow\; \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{gd}\right).$$

Para achar o mínimo valor de v, vamos analisar a expressão

$$\left(v - \frac{gd}{v}\right)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; v^2 + \left(\frac{gd}{v}\right)^2 - 2gd \geq 0 \;\Rightarrow\; u^2 - 2gd \geq 0.$$

Então temos que $u \geq \sqrt{2gd}$, ou seja $u_{\min} = \sqrt{2gd}$. No valor minimo temos que

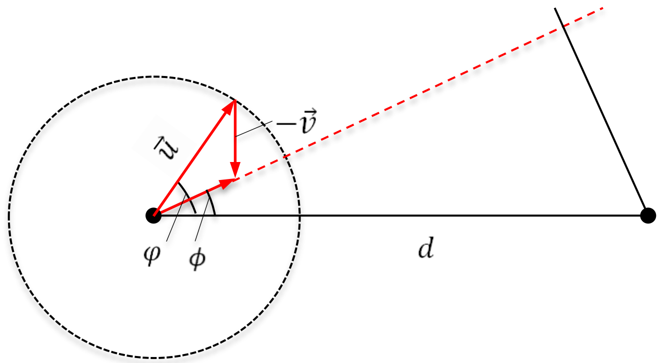
$$2gd = v^2 + \left(\frac{gd}{v}\right)^2 \;\Rightarrow\; v^4 - 2gdv^2 + g^2d^2 = 0 \;\Rightarrow\; (v^2 - gd)^2 = 0.$$

Ou seja temos que $v = gd$.

Solução 2 (Sistema de Referência na Bola Direita): Podemos utilizar um sistema de referência que move-se junto com a bola da direita. Neste sistema de referencia temos que a aceleração da bola da esquerda é $\vec{a}_{lr} = \vec{a}_l - \vec{a}_r = \vec{g} - \vec{g} = 0$, ou seja a bola move-se com movimento uniforme. A velocidade da bola da esquerda neste sistema de referência pode ser determinada utilizando a condição inicial do problema, $\vec{v}_{lr} = \vec{v}_l - \vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}$ (veja a figura). Então as componentes da velocidade do corpo da esquerda neste sistema de referência serão $v_{lr,x} = u\cos(\varphi)$ e $v_{lr,y} = u\sin(\varphi) - v$. O ângulo com a linha horizontal neste caso é dado por

$$\tan(\phi) = \frac{v_{lr,y}}{v_{lr,x}} = \frac{u\sin(\varphi) - v}{u\cos(\varphi)}.$$

A linha vermelha tracejada representa a trajetória da bola da esquerda, então o impacto só acontece sim $\phi = 0$, ou seja, $\tan(\phi) = 0$, então $u\sin(\varphi) - v = 0$



Neste sistema de referência o tempo até o encontro é dado por $d = ut\cos(\varphi)$, mas o tempo é uma invariante segundo as transformações de Galileo, então, no sistema de referência fixo a terra temos que $v = gt$. Juntando as equações obtemos

$$d = u\frac{v}{g}\cos(\varphi) = \frac{uv}{g}\sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} = \frac{uv}{g}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2}$$

Onde finalmente achamos

$$d = \frac{v}{g}\sqrt{u^2 - v^2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{gd}{v}\right)^2 = u^2 - v^2 \;\Rightarrow\; u = \sqrt{v^2 + \left(\frac{gd}{v}\right)^2}.$$

Esta segunda solução não é particularmente melhor que a primeira. Existem outros problemas que serão discutidos no curso onde realmente acharemos muitas facilidades ao passar de um sistema de referência fixo em terra para outro em movimento.

Problema 3 (*2003, 11-2, Rússia*)
Encontre a aceleração da carga 1 no sistema mostrado na figura. O pano horizontal é liso, não há atrito entre as cargas, o fio e as polias não tem peso, o fio é inextensível, as massas das três cargas são iguais. No momento inicial, todos os corpos estão em repouso.

Solução: Primeiro utilizamos a segunda lei de Newton para os diferentes corpos. No corpo 1 temos

$$\vec{N}_1 + m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_1.$$

Projetando nos eixos coordenados da figura temos

$$N_1 = ma_{1,x}$$
$$mg - T = ma_{1,y}$$

No corpo 2 temos

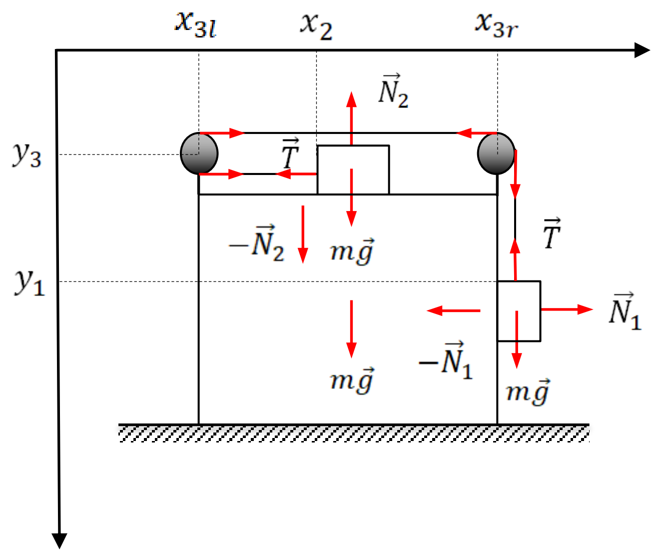
$$\vec{N}_2 + m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_2$$

Como o corpo 2 move-se no eixo x, teremos

$$-T = ma_2$$

Finalmente no corpo 3, em x, teremos

$$T - N_1 = ma_3$$



Juntando as equações anteriores achamos as relações seguintes

$$a_{1,x} = \frac{N_1}{m}, \qquad a_{1,y} = g - \frac{T}{m}, \qquad a_2 = -\frac{T}{m}, \qquad a_3 = \frac{T}{m} - \frac{N_1}{m}.$$

As relações anteriores podem ser escritas como (note que claramente $a_3 = a_{1,x}$)

$$a_{1,y} = g + a_2, \qquad 2a_{1,x} + a_2 = 0, \qquad a_{1,y} - a_{1,x} + a_2.$$

Uma invariante geométrica do problema é o comprimento do fio, então temos $(y_1 - y_3) + (x_{3r} - x_{3l}) + (x_2 - x_{3l}) = const$, ou seja, $y_1 - x_{3l} + x_2 = const$. Olhando dos instantes de tempo muito próximos t, e $t + \Delta t$ (onde $t \gg \Delta t$), achamos $\Delta y_1 - \Delta x_{3l} + \Delta x_2 = 0$. Dividindo duas vezes por Δt, achamos $a_{1,y} - a_3 + a_{2,x} = 0$. Finalmente

$$a_{1,x} = \frac{g}{5}, \qquad a_{1,y} = \frac{3g}{5} \;\Rightarrow\; a_1 = \sqrt{a_{1,x}^2 + a_{1,y}^2} = \sqrt{\frac{2}{5}}g.$$

Problema 4 (*5.5.15, O. Ya. Sávchenko, URSS, 1981*)
Em um recipiente cilíndrico há um pistão pesado em equilíbrio. Acima do pistão e abaixo dele são puxadas massas iguais de gás ideal a temperaturas idênticas. A razão entre o volume superior e inferior é igual a 3. Qual é a razão entre os volumes se aumentarmos a temperatura do gás para o dobro?

Solução: Nos instantes inicial e final, o pistão está em equilíbrio térmico e mecânico. O que significa que as forças que atuam sobre ele somam zero. Existem três forças: $m\vec{g}$ que representa a força gravitacional (onde m é a massa do pistão); a força da pressão do gás no volume superior $\vec{F}_s$; e a força da pressão do gás no volume inferior $\vec{F}_i$. Logo pela segunda lei de Newton (na forma vetorial) temos que $m\vec{g} + \vec{F}_s + \vec{F}_i = 0$. Sejam P_i e P_s as pressões do gás no volume inferior e superior do cilindro respectivamente, e S a área do pistão, então na forma escalar temos

$$P_iS - P_sS = mg \;\Rightarrow\; P_i - P_s = \frac{mg}{S}.$$

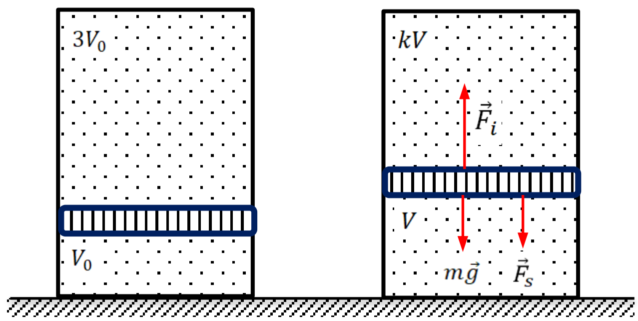
Onde temos a diferença das pressões do gás no volume inferior e o gás no volume superior. Note que nós não especificamos até agora se estamos tratando o estado inicial o final do pistão. A condição anterior é valida para ambos os estados.

Agora pensemos no estado inicial do pistão. A pressão do gás nos diferentes volumes pode ser obtida utilizando a lei de estado dos gases ideais. Então

$$\frac{nRT_0}{V_0} - \frac{nRT_0}{3V_0} = \frac{mg}{S},$$

onde n representa a quantidade de substancia do gás (igual em ambos os volumes), R é a constante dos gases ideais e T_0 é a temperatura inicial do sistema. No estado final do pistão temos uma equação similar que pode ser escrita como

$$\frac{nRT}{V} - \frac{nRT}{kV} = \frac{mg}{S}.$$



Igualando as duas equações, obtemos uma relação entre V e V_0

$$\frac{T_0}{V_0} - \frac{T_0}{3V_0} = \frac{T}{V} - \frac{T}{kV} \;\Rightarrow\; \frac{2T_0}{3V_0} = \frac{T}{V}\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

Pelas condições do problema conhecemos que $T = 2T_0$, então a equação anterior adopta a forma $kV = 3V_0(k-1)$. Outra relação entre V e V_0 pode ser achada si notamos que uma invariante geométrica do problema é o volume total do cilindro, ou seja, $4V_0 = (k+1)V$. Utilizando as duas relações chega-se à equação $4k = 3(k^2-1)$. Nós estamos interessados em achar o valor de k que é solução da equação de segundo grau (e que é positivo, note que um valor negativo não tem sentido físico). Finalmente obtemos que

$$k = \frac{1}{3}\left(2+\sqrt{13}\right) \approx 1.87$$

Problema 5 (*2.48, I. E. Irodov, URSS, 1988*)
Um gás ideal cujo exponente adiabático é igual a γ é expandido de acordo com a lei $P = \alpha V$, onde α é uma constante, P é a pressão e V o volume. O volume inicial do gás é igual a V_0. Como resultado da expanssão o volume aumenta η vezes. Encontrar:

a) O incremento da energia interna do gás.
b) O trabalho realizado pelo gás.
c) A capacidade térmica molar do gás no processo.

Solução: O incremento da energia interna do gás é

$$\Delta U = \frac{nR\Delta T}{\gamma - 1},$$

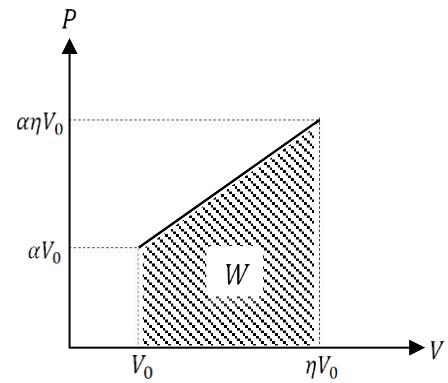
onde $\Delta T = T_f - T_i$, com T_i e T_f sendo as temperaturas inicial e final do gás ideal respectivamente. Pela equação de estado do gás ideal nos instantes inicial e final temos

$$P_i V_i = nRT_i \;\; \Rightarrow \;\; (\alpha V_0)V_0 = nRT_i \;\; \Rightarrow \;\; \alpha V_0^2 = nRT_i,$$

$$P_f V_f = nRT_f \;\; \Rightarrow \;\; (\alpha\eta V_0)(\eta V_0) = nRT_f \;\; \Rightarrow \;\; \alpha\eta^2 V_0^2 = nRT_f.$$

Então obtemos

$$\Delta T = \frac{\alpha V_0^2}{nR}(\eta^2 - 1) \;\; \Rightarrow \;\; \Delta U = \frac{\alpha(\eta^2 - 1)}{\gamma - 1} V_0^2.$$



O trabalho realizado pelo gás é numericamente igual à área sob a linha $P(V)$, (ver figura), então temos que

$$W = (\alpha V_0)(\eta V_0 - V_0) + \frac{1}{2}(\eta V_0 - V_0)(\alpha\eta V_0 - \alpha V_0)$$
$$= \frac{\alpha}{2}(\eta^2 - 1)V_0^2.$$

Usando a primeira lei da termodinâmica temos que $Q = \Delta U + W$, ou seja,

$$Q = \frac{\alpha(\eta^2 - 1)}{\gamma - 1} V_0^2 + \frac{\alpha}{2}(\eta^2 - 1)V_0^2 = \frac{\alpha(\eta^2 - 1)}{2}\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right) V_0^2.$$

Note que também temos $Q = nc\Delta T$, onde c representa a capacidade térmica molar. Então

$$\frac{\alpha(\eta^2 - 1)}{2}\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right) V_0^2 = nc\frac{\alpha V_0^2}{nR}(\eta^2 - 1) \;\; \Rightarrow \;\; c = \frac{R}{2}\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right).$$

Problema 6 (*2564, KVANT, 04-2019*)

Em um campo magnético homogêneo e uniforme B, em um plano vertical, existe um fio metálico rígido fixo com a forma de arco com raio R (veja a figura). Uma pequena arruela metálica de massa m pode deslizar ao longo do fio sem atrito, mas com bom contato elétrico. A arruela está ligada a um dos terminais de uma bobina de indutância L, localizado no centro O do círculo, por um condutor fino, flexível e leve, que está sempre em posição quase reta. O segundo terminal da bobina é conectado ao fio rígido curvo. A resistência elétrica de todos os elementos estruturais pode ser desprezada. Também é possível desprezar a indutância do fio dobrado ao longo do qual a arruela desliza, em comparação com o valor L. No momento inicial, a arruela está ligeiramente à direita do ponto A (ponto mais alto), sua velocidade é zero e a corrente no circuito é zero. No momento em que a arruela atinge o ponto C (ponto mais baixo), sua velocidade torna-se zero.

Solução: Usando análise dimensional temos que $[R] = \mathrm{L}$, $[g] = \mathrm{LT}^2$, $[m] = \mathrm{M}$, $[L] = \mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}\mathrm{I}^{-2}$, $[I] = \mathrm{I}$ e $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$. Então temos que

$$[v] = [g]^{x_1}[R]^{x_2} \;\; \Rightarrow \;\; \mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{L}^{x_1}\mathrm{T}^{-2x_2}\mathrm{L}^{x_2} \;\; \Rightarrow \;\; \mathrm{L}^{x_1+x_2}\mathrm{T}^{-2x_2},$$

onde achamos que $x_1 + x_2 = 1$ e $-2x_1 = 1$, finalmente $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Ou seja, temos que $v = \alpha\sqrt{gR}$.

Agora, para a intensidade da corrente elétrica temos $[I] = [g]^{x_1}[R]^{x_2}[m]^{x_3}[L]^{x_4}$, onde

$$\mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}\mathrm{I}^{-2} = \mathrm{L}^{x_1+x_2+2x_4}\mathrm{M}^{x_3+x_4}\mathrm{T}^{-2x_1-2x_4}\mathrm{I}^{-2x_4}.$$

Onde achamos o sistema seguinte $x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $-2x_1 - 2x_4 = 0$ e $-2x_4 = 1$. Finalmente $x_1 = x_2 = x_3 = -x_4 = \frac{1}{2}$. Então

$$I = \beta\sqrt{\frac{mgR}{L}}.$$

Onde α e β são parâmetros adimensionais (em geral funções do ângulo φ).

Considere que circula uma corrente elétrica I pelo circuito fechado. O fluxo magnético total $\Phi(\varphi)$ é composto pelo fluxo da bobina LI e o fluxo do campo magnético $\Phi_B(\varphi)$ que passa pelo circuito fechado, ou seja

$$\Phi(\varphi) = LI + \Phi_B(\varphi).$$

O fluxo $\Phi_B(\varphi) = \vec{B} \cdot \vec{S}$, onde $\vec{S}$ é um vetor normal ao plano do circuito com modulo igual à área do circuito fechado

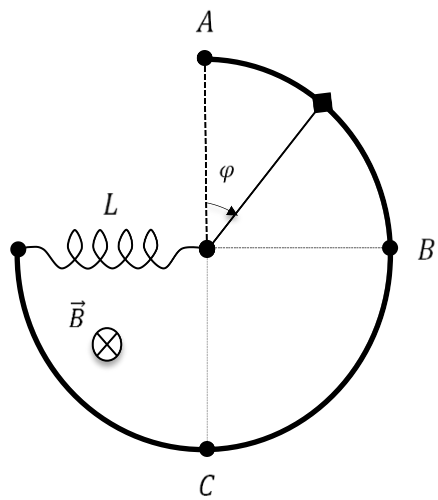
$$S = \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) R^2,$$

Então o fluxo total é

$$\Phi(\varphi) = LI + \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) BR^2.$$

Utilizando a expressão para I, achamos

$$\Phi(\varphi) = \beta\sqrt{mgRL} + \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) BR^2.$$



Neste problema a resistência elétrica de todos os elementos estruturais pode ser desprezada, então o fluxo magnético total é conservado. Comparando o instante inicial (arruela no ponto A, com $I = 0$) com outro quando a arruela está num ponto com um raio formando um ângulo φ com a vertical temos que

$$\Phi(0) = \Phi(\varphi) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{3\pi}{4} BR^2 = \beta\sqrt{mgRL} + \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) BR^2.$$

Então, obtemos

$$\beta = \frac{BR^2}{\sqrt{mgRL}} \frac{\varphi}{2}.$$

Agora achemos a energia $E(\varphi)$ total do sistema, que pode ser dividida numa parte mecânica e uma parte eletromagnética, ou seja,

$$E(\varphi) = E_m(\varphi) + E_B(\varphi).$$

A energia mecânica (o ponto C é o nível zero de energia potencial gravitacional) será

$$E_m(\varphi) = mgR\cos(\varphi) + \frac{mv^2(\varphi)}{2},$$

onde $v(\varphi)$ é a velocidade da arruela em função do ângulo φ. A energia eletromagnética sera armazenada na bobina, e é igual a

$$E_e(\varphi) = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2L}\left(\frac{B\varphi R^2}{2}\right)^2,$$

então a energia total é dada por

$$E(\varphi) = mgR\cos(\varphi) + \frac{mv^2(\varphi)}{2} + \frac{1}{2L}\left(\frac{B\varphi R^2}{2}\right)^2.$$

Utilizando a lei de conservação da energia entre os pontos A e C (velocidade zero) obtemos

$$mgR = -mgR + \frac{1}{2L}\left(\frac{B\pi R^2}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; 2mgR = \frac{1}{2L}\left(\frac{B\varphi R^2}{2}\right)^2,$$

onde obtemos a relação

$$\sqrt{mgRL} = \frac{\pi}{4}BR^2 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{2\varphi}{\pi}.$$

Para determinar o valor de α como função de φ utilizamos novamente a lei de conservação da energía, consideremos o ponto A e outro ponto diferente de C, então

$$mgR = mgR\cos(\varphi) + \frac{m}{2}\alpha gR + \frac{L}{2}\frac{4\varphi^2}{\pi^2}\left(\frac{mgR}{L}\right),$$

$$1 - \cos(\varphi) = \frac{\alpha}{2} + \frac{2\varphi^2}{\pi^2} \;\Rightarrow\; 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{2\varphi^2}{\pi^2},$$

onde foi utilizado que $1 - \cos(\varphi) = 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, então finalmente temos que

$$\alpha = 4\left[\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi^2}{\pi^2}\right].$$

No ponto B temos $\varphi = \pi/2$, então $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Finalmente obtemos $I\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{mgR}{L}}$, e $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{gR}$.