

# Pêndulo Não Padrão I

**Problema** (1978, Ashjabad, URSS) ----- Novembro 17, 2023.

Um pêndulo representa uma barra de comprimento  $l$  com uma carga na extremidade. Na outra extremidade, a barra é sustentada por uma leve arruela cilíndrica de raio interno  $R$ , inserido em um eixo horizontal que gira (ver Figura 1). O coeficiente de atrito entre a bucha e o eixo é  $\mu$ . Determine o ângulo de desvio da barra em relação à vertical em equilíbrio.

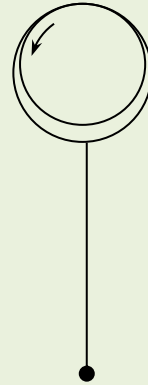


Figura 1

**Solução:** Quando o pêndulo está no equilíbrio a soma dos momentos de todas as forças que atuam sobre ele respeito ao ponto de contato da arruela com o eixo deve ser zero. Já que além da força de atrito  $\vec{F}_R$  e a força normal  $\vec{N}$ , que certamente tem momentos de força nulos, no pêndulo só atua a força da gravidade  $m\vec{g}$ , é claro que o ponto de contato da arruela cilíndrica com o eixo tem que ficar na mesma vertical que a carga (ver Figura 2). Se o raio tracejado ate o ponto de contato forma um ângulo  $\beta$  com o horizonte, então temos a condição geométrica:

$$R \cos(\beta) = l \sin(\alpha), \quad (1)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo que o pêndulo forma com a vertical. É claro também que

$$\tan(\beta) = \frac{N}{F_R} = \frac{1}{\mu},$$

então temos que

$$\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\beta)}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (2)$$

Finalmente pelas igualdades (1) e (2) obtemos

$$\sin(\alpha) = \frac{R}{l} \cos(\beta) = \frac{R\mu}{l\sqrt{1 + \mu^2}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{R\mu}{l\sqrt{1 + \mu^2}}\right).$$

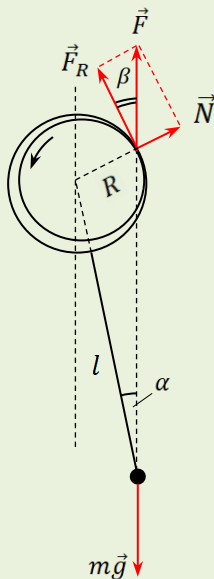


Figura 2