# Máquina Térmica I

**Problema** ----- Novembro 27,2023.

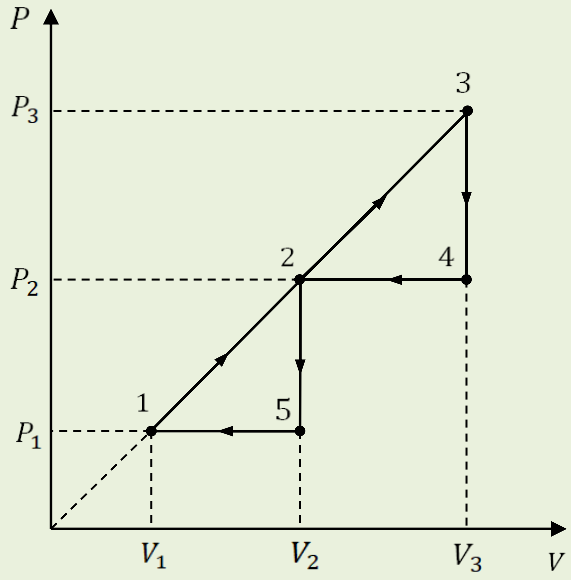
Uma máquina térmica, cujo fluido de trabalho é um gás ideal monoatômico, realiza trabalho no ciclo 1-2-3-4-2-5-1, mostrado no diagrama $PV$ (ver Figura). Os pontos 1,2 e 3 estão em uma linha reta que passa pela origem do diagrama e o ponto 2 é o ponto médio do segmento 1-3. Encontre a eficiência da máquina térmica se a temperatura máxima do gás neste ciclo for $n$ vezes maior que a temperatura mínima. Calcule o valor da eficiência para $n = 4$.

*Solução*: Denotemos as pressões, volumes e temperaturas que o gás possui nos estados 1, 2 e 3, conforme mostra a Figura. Então, para cada um desses estados podemos escrever a equação de Clapeyron:

$$P_1V_1 = \gamma RT_1, \quad (1)$$

$$P_2V_2 = \gamma RT_2, \quad (2)$$

$$P_3V_3 = \gamma RT_3, \quad (3)$$




onde $\gamma$ é o número de moles de gás. Além disso, das condições do problema temos as seguintes relações:

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2} = \frac{P_3}{V_3}, \quad (4)$$

$$V_2 = \frac{V_1 + V_3}{2}, \quad (5)$$

$$P_2 = \frac{P_1 + P_3}{2}. \quad (6)$$

Primeiro, obtemos várias fórmulas auxiliares. De (1), (2), (3) e (4) obtemos:

$$\frac{T_1}{V_1^2} = \frac{T_2}{V_2^2} = \frac{T_3}{V_3^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad \text{e} \quad \frac{V_3}{V_1} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}. \quad (7)$$

Dividindo ambos os lados da equação (5) por $V_1$, levando em consideração as equações (7) obtemos:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{1 + \frac{V_3}{V_1}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}\right),$$

de onde obtemos que

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4}\left(1 + 2\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} + \frac{T_3}{T_1}\right) \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{1}{4}\left(T_1 + 2\sqrt{T_1 T_3} + T_3\right),$$

$$T_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_3}\right)^2. \quad (8)$$

Agora vamos começar a encontrar a eficiência. Neste ciclo, o gás recebe calor do aquecedor na seção 1-2-3. De acordo com a primeira lei da termodinâmica

$$Q_A = \Delta U_{13} + A_{123} = \frac{3\gamma R}{2}(T_3 - T_1) + \frac{1}{2}(P_1 + P_3)(V_3 + V_1).$$

Levando em consideração (1), (3) e (4), a expressão anterior pode ser transformada da seguinte forma:

$$Q_A = \frac{3\gamma R}{2}(T_3 - T_1) + \frac{1}{2}(P_1 V_3 - \gamma R T_1 + \gamma R T_3 + P_3 V_1),$$

$$Q_A = 2\gamma R(T_3 - T_1). \quad (9)$$

A seguir, vamos determinar a quantidade de calor que p gás fornece ao refrigerador na seção 3-4-2-5-1. Esta quantidade de calor é igual (em valor absoluto)

$$Q_C = \frac{3\gamma R}{2}(T_3 - T_1) + P_1 V_2 - \gamma R T_1 + P_2 V_3 - \gamma R T_2,$$

$$Q_C = \frac{3\gamma R}{2}(T_3 - T_1) + \gamma R T_1 \frac{V_2}{V_1} - \gamma R T_1 + \gamma R T_2 \frac{V_3}{V_2} - \gamma R T_2,$$

$$Q_C = \frac{\gamma R}{4}\left(3T_3 - 5T_1 - 2T_2 + 2\sqrt{T_1 T_2} + 2\sqrt{T_2 T_3}\right).$$

Por fim, a última expressão, levando em consideração (8), fica reduzida à forma:

$$Q_C = \frac{\gamma R}{4}\left(7T_3 - 9T_1 + 2\sqrt{T_1 T_3}\right). \quad (10)$$

A eficiência da máquina neste ciclo pode ser encontrada usando (9) e (10)

$$\eta = 1 - \frac{Q_C}{Q_A} = \frac{T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3} + T_3}{8(T_3 - T_1)} = \frac{\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2}{8(T_3 - T_1)} = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_3} + \sqrt{T_1}}\right).$$

Observe que $T_3$ e $T_1$ são as temperaturas máxima e mínima do gás em um determinado ciclo. Visto que de acordo com as condições do problema $T_3 = nT_1$, então

$$\eta = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}\right).$$

No caso $n = 4$ temos que $\eta = 4.17\%$.

**Nota:** Observe que ao calcular a eficiência, em vez da quantidade de calor $Q_C$, podemos determinar o trabalho realizado pelo gás em um ciclo. É numericamente igual à área da figura 1-2-3-4-2-5-1

$$A_{1234251} = \frac{\gamma R}{4}\left(T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3} + T_3\right) = \frac{\gamma R}{4}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3}\right)^2.$$

No entanto, este método de resolver o problema é um pouco mais trabalhoso.