O Trem Cósmico de Impactos

Problema (2002,10-2, Rússia) ----- Dezembro 8,2023.

Em uma calha reta horizontal, N=2002 pequenas bolas estão a distâncias iguais L=1 m umas das outras. Sabe-se que as bolas estão dispostas em ordem decrescente de suas massas e que as massas das bolas vizinhas diferem entre si em $\alpha=1\%$. A bola mais pesada no instante t=0 recebeu uma velocidade v=1 m/s na direção das outras bolas. Supondo que todos os impactos sejam absolutamente elásticos, descubra quanto tempo depois a bola mais leve começa a se mover. Não há atrito. Despreze o tempo de colisão.

Solução: Deixe a massa da primeira bola (mais pesada) ser m. Então a massa da segunda bola é $(1-\alpha)m$, a da terceira é $(1-\alpha)^2m$, e assim por diante (aqui $\alpha=0.01$). Deixe após a colisão a primeira bola adquirir velocidade u, e a segunda começou a se mover com velocidade v_1 . Vamos escrever as leis de conservação do momento e da energia para a colisão da primeira e da segunda bolas:

$$mv = mu + (1 + \alpha)mv_1,$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{(1-\alpha)mv_1^2}{2}.$$

Portanto, a velocidade da primeira bola é

$$u = \frac{\alpha}{2 - \alpha} v > 0,$$

E a velocidade da segunda

$$v_1 = \frac{2}{2-\alpha}v > u > 0.$$

Assim, após a primeira colisão, ambas as bolas se moverão na direção do movimento inicial da primeira bola, com a segunda bola, mais leve, movendo-se mais rápido que a primeira, mais pesada. Como as bolas estão dispostas em ordem decrescente de suas massas, um raciocínio semelhante é válido para qualquer par de bolas em colisão. Portanto, qualquer bola mais pesada que colida com a próxima bola mais leve não afetará posteriormente o movimento adicional de todas as outras bolas mais leves. Como resultado, ao resolver o problema, podese simplesmente considerar as colisões em uma cadeia de bolas sequencialmente.

A primeira colisão das bolas ocorrerá após o tempo $\Delta t_0 = L/v$. Como as massas de quaisquer duas bolas vizinhas diferem pelo mesmo número de vezes, uma fórmula semelhante é válida para qualquer colisão. Portanto, a velocidade da terceira bola (após a segunda colisão) é igual a

$$v_2 = \frac{2}{2-\alpha}v_1 = \left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^2 v$$
,

velocidade da quarta bola (após a terceira colisão) é

$$v_3 = \frac{2}{2-\alpha}v_2 = \left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^3 v$$
,

e assim por diante. Portanto, o intervalo de tempo entre as colisões das (n+1)-ésima e (n+2)-ésima bolas é igual a

$$\Delta t_n = \frac{L}{v_n} = \frac{L}{v} \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^n,$$

onde n=0,1,2,...,N-2, e o tempo após o qual a última bola começa a se mover é igual à soma de todos os intervalos Δt_n :

$$T = \frac{L}{v} + \frac{L}{v} \left(\frac{2-\alpha}{2}\right) + \frac{L}{v} \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^2 + \dots + \frac{L}{v} \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^{N-2}.$$

A última soma é a soma de N-1 termos da progressão geométrica com o primeiro termo a=L/v e ração $q=(2-\alpha)/\alpha$. Então obtemos que

$$T = \frac{a(1 - q^{N-1})}{1 - q} = \frac{L}{v} \left[\frac{1 - \left(\frac{2 - \alpha}{2}\right)^{N-1}}{1 - \frac{2 - \alpha}{2}} \right] = \frac{2L}{\alpha v} \left[1 - \left(\frac{2 - \alpha}{2}\right)^{N-1} \right] \approx \frac{2L}{\alpha v},$$

$$T \approx 200 \text{ s}.$$

A última fórmula leva em conta que $q^{N-1} \ll 1$.

Observe que a última bola após a colisão adquirirá velocidade

$$v_{N-1} = \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^{N-1} v = \frac{v}{q^{N-1}} \approx 22.8 \text{ Km/s},$$

que excede a segunda velocidade de escape!

