O Trem Cósmico de Impactos

Problema (*2002,10-2, Rússia*) ----- Dezembro 8,2023.

Em uma calha reta horizontal, $N = 2002$ pequenas bolas estão a distâncias iguais $L = 1\ \mathrm{m}$ umas das outras. Sabe-se que as bolas estão dispostas em ordem decrescente de suas massas e que as massas das bolas vizinhas diferem entre si em $\alpha = 1\%$. A bola mais pesada no instante $t = 0$ recebeu uma velocidade $v = 1\ \mathrm{m/s}$ na direção das outras bolas. Supondo que todos os impactos sejam absolutamente elásticos, descubra quanto tempo depois a bola mais leve começa a se mover. Não há atrito. Despreze o tempo de colisão.

Solução: Deixe a massa da primeira bola (mais pesada) ser m. Então a massa da segunda bola é $(1-\alpha\ )m$, a da terceira é $(1-\alpha)^2 m$, e assim por diante (aqui $\alpha = 0.01$). Deixe após a colisão a primeira bola adquirir velocidade u, e a segunda começou a se mover com velocidade v_1. Vamos escrever as leis de conservação do momento e da energia para a colisão da primeira e da segunda bolas:

$$mv = mu + (1+\alpha)mv_1,$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{(1-\alpha)mv_1^2}{2}.$$

Portanto, a velocidade da primeira bola é

$$u = \frac{\alpha}{2-\alpha} v > 0,$$

E a velocidade da segunda

$$v_1 = \frac{2}{2-\alpha} v > u > 0.$$

Assim, após a primeira colisão, ambas as bolas se moverão na direção do movimento inicial da primeira bola, com a segunda bola, mais leve, movendo-se mais rápido que a primeira, mais pesada. Como as bolas estão dispostas em ordem decrescente de suas massas, um raciocínio semelhante é válido para qualquer par de bolas em colisão. Portanto, qualquer bola mais pesada que colida com a próxima bola mais leve não afetará posteriormente o movimento adicional de todas as outras bolas mais leves. Como resultado, ao resolver o problema, pode-se simplesmente considerar as colisões em uma cadeia de bolas sequencialmente.

A primeira colisão das bolas ocorrerá após o tempo $\Delta t_0 = L/v$. Como as massas de quaisquer duas bolas vizinhas diferem pelo mesmo número de vezes, uma fórmula semelhante é válida para qualquer colisão. Portanto, a velocidade da terceira bola (após a segunda colisão) é igual a

$$v_2 = \frac{2}{2-\alpha} v_1 = \left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^2 v,$$

velocidade da quarta bola (após a terceira colisão) é

$$v_3 = \frac{2}{2-\alpha} v_2 = \left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^3 v,$$

e assim por diante. Portanto, o intervalo de tempo entre as colisões das $(n\, +\, 1)$-ésima e $(n\, +\, 2)$-ésima bolas é igual a

$$\Delta t_n = \frac{L}{v_n} = \frac{L}{v}\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^n,$$

onde $n\ =\ 0, 1, 2, \ldots, N\ -\ 2$, e o tempo após o qual a última bola começa a se mover é igual à soma de todos os intervalos Δt_n:

$$T = \frac{L}{v} + \frac{L}{v}\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) + \frac{L}{v}\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{L}{v}\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^{N-2}.$$

A última soma é a soma de $N-1$ termos da progressão geométrica com o primeiro termo $a =\ L/v$ e ração $q = (2-\alpha)/\alpha$. Então obtemos que

$$T = \frac{a(1-q^{N-1})}{1-q} = \frac{L}{v}\left[\frac{1-\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^{N-1}}{1-\frac{2-\alpha}{2}}\right] = \frac{2L}{\alpha v}\left[1-\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^{N-1}\right] \approx \frac{2L}{\alpha v},$$

$$T \approx 200\ \mathrm{s}.$$

A última fórmula leva em conta que $q^{N-1} \ll 1$.

Observe que a última bola após a colisão adquirirá velocidade

$$v_{N-1} = \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^{N-1} v = \frac{v}{q^{N-1}} \approx 22.8\ \mathrm{Km/s},$$

que excede a segunda velocidade de escape!