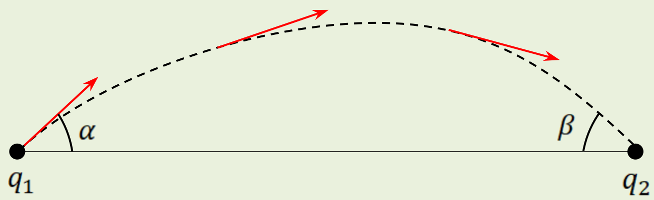
As Linhas do Campo: I

Problema (*3.2, S. S. Krotov, URSS, 1990*) ----- Dezembro 12,2023.

Uma linha de campo elétrico emerge de uma carga pontual positiva $+q_1$ formando um ângulo α com a reta que a conecta a uma carga pontual negativa $-q_2$ (ver Figura). Em que ângulo β a linha de campo entrará na carga $-q_2$?



Solução: Na proximidade imediata de cada uma das cargas pontuais, a contribuição da outra carga para a intensidade total do campo é insignificantemente pequena e, portanto, as linhas de campo elétrico emergem (entram) na carga em um feixe espacialmente homogêneo, sendo seu número total, N_+, proporcional à magnitude da carga. Apenas uma fracção, n_+, dessas linhas entra em um cone com ângulo 2α no vértice próximo à carga $+q_1$. A razão entre os números n_+, e N_+ é igual à razão entre as áreas dos segmentos esféricos correspondentes:

$$\frac{n_+}{N_+} = \frac{2\pi R^2[1-\cos(\alpha)]}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}[1-\cos(\alpha)]. \quad (1)$$

Um raciocínio similar para a carga $-q_2$ deixa a relação:

$$\frac{n_-}{N_-} = \frac{1}{2}[1-\cos(\beta)]. \quad (2)$$

Como as linhas do campo elétrico conectam as duas cargas e elas não se cruzam entre elas, o número de linhas que emergem da carga $+q_1$ dentro do cone com ângulo 2α é igual ao numero de linhas que entram na carga $-q_2$ no cone com ângulo de apertura 2β. Consequentemente temos $n_+ = n_-$, então utilizando (1) e (2) obtemos:

$$N_+[1-\cos(\alpha)] = N_-[1-\cos(\beta)] \quad \Rightarrow \quad \frac{N_+}{N_-} = \frac{1-\cos(\beta)}{1-\cos(\alpha)}. \quad (3)$$

Usando a identidade trigonométrica $1-\cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$, obtemos

$$\frac{N_+}{N_-} = \frac{\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (4)$$

Pelo teorema de Gauss temos que o número total de linhas de força que emergem (entram) em uma carga pontual é proporcional ao valor absoluto da carga, então:

$$\frac{N_+}{N_-} = \frac{|q_1|}{|q_2|}. \qquad (5)$$

Finalmente pelas equações (4) e (5) obtemos que:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{|q_1|}{|q_2|} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\beta = 2 \arcsin\left[\sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Notes que no caso $\sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 1$, uma linha do campo elétrico não entrará na carga $-q_2$.