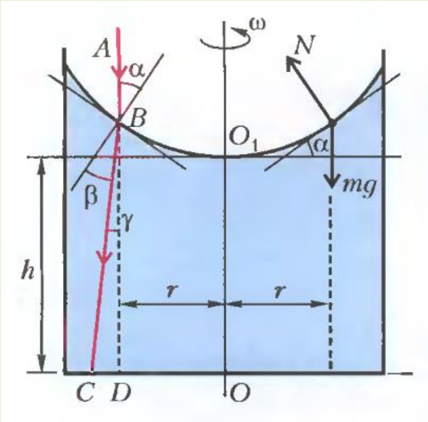
Newton e Snell

Problema *(KBAHT N^o 6-2004/ONUF 2014)* ----- Fevereiro 09,2024.

Um líquido viscoso com índice de refração $n = 1.5$ é colocado em um recipiente de vidro cilíndrico e vertical. Um feixe paralelo de luz de intensidade constante cai verticalmente no líquido. O recipiente junto com o líquido é girado em torno de seu eixo a uma velocidade angular $\omega = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, enquanto a altura da coluna de líquido no eixo do recipiente tornou-se igual a $h = 30$ cm. Quanto por cento a intensidade da luz caindo perto do fundo do recipiente mudou? A aceleração da gravidade é $g = 10\ m/s^2$, a absorção de luz no líquido e seu reflexo dentro do recipiente são negligenciados.



Solução: Quando o líquido gira junto com o recipiente de vidro, sua superfície se curva (ver figura), como resultado do qual o feixe de luz experimenta uma refração na superfície do líquido. Consideremos um pequeno elemento de líquido localizado em sua superfície a uma distância r do eixo de rotação OO_1. O elemento é afetado pela força de gravidade $m\vec{g}$ é pela reação normal $\vec{N}$ das restantes partículas do líquido. Essas forças garantem uma rotação uniforme do elemento em questão ao longo de um círculo com uma velocidade angular ω, dando-lhe uma aceleração centrípeta. As equações do movimento deste elemento em projeções nos eixos horizontal e vertical são

$$m\omega^2 r = N\sin(\alpha)\,, \quad mg = N\cos(\alpha),$$

onde α é o ângulo de inclinação em relação ao horizonte da superfície do líquido em um determinado ponto. A partir daqui encontramos

$$\tan(\alpha) = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

O raio de luz viajando ao longo do eixo de rotação OO_1 não é refratado. Considere o curso do raio ABC refratado no ponto B a uma pequena distância r do eixo de rotação. De acordo com a lei da refração de luz,

$$\sin(\alpha) = n\sin(\beta).$$

Os ângulos α, β, e $\gamma = \alpha - \beta$ podem ser considerados pequenos, então, $\alpha \approx \sin(\alpha) \approx \tan(\alpha)$, $\beta \approx \sin(\beta)$, e $\gamma \approx \tan(\gamma)$. Ou seja:

$$\alpha \approx \frac{\omega^2 r}{g}, \quad \gamma = \alpha - \beta \approx \alpha - \frac{\alpha}{n} = \frac{\omega^2 r}{g}\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Em seguida, encontre a distância do eixo de rotação até o ponto de queda do raio refratado no vidro do fundo do recipiente:

$$\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} \approx r + \gamma h = r\left(1 + \frac{\omega^2 h}{g} \cdot \frac{n-1}{n}\right).$$

Enquanto o líquido não foi girado, todo raios vindo a uma distância menor que r do eixo OO_1 não é refratado e vai para um círculo com um raio r na parte inferior do recipiente, ou seja, a energia deste feixe é distribuída sobre a área:

$$S_0 = \pi r^2.$$

Depois que o recipiente é rotado temos que os raios vão para um circulo com raio $\overline{OC}$, então a energia do feixe é distribuída sobre a área:

$$S_1 = \pi \cdot \overline{OC}^2 = \pi r^2 \left(1 + \frac{\omega^2 h}{g} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Portanto, a intensidade do feixe de luz caindo no fundo no recipiente de vidro, perto do eixo do sistema é reduzida no fator:

$$\delta = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \left(1 + \frac{\omega^2 h}{g} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^2 - 1 \approx \frac{2\omega^2 h}{g} \cdot \frac{n-1}{n} = 2\%.$$