ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Lei de Coulomb e Cargas Elétricas

São Paulo | 25 de fevereiro de 2024.

Resumo

Estas notas foram criadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP).

Atualmente sabe-se que diversos fenômenos na natureza são baseados em quatro interações fundamentais entre partículas elementares: interações fortes, eletromagnéticas, fracas e gravitacionais. Cada tipo de interação está associada a uma determinada característica de uma partícula. Por exemplo, a interação gravitacional, depende da massa das partículas, enquanto a interação eletromagnética é determinada por cargas elétricas.

A carga elétrica de uma partícula é uma de suas características básicas, e possui as seguintes propriedades fundamentais:

1. a carga elétrica existe em duas formas, ou seja, pode ser positiva ou negativa;

2. a soma algébrica das cargas em qualquer sistema eletricamente isolado não muda (esta afirmação expressa a *lei da conservação da carga elétrica*);

3. a carga elétrica é um *invariante relativístico*: sua magnitude não depende do sistema de referência, ou seja, não depende se a carga se move ou é fixa.

4. qualquer carga positiva ou negativa q que possa ser detectada pode ser escrita como $q = ne$, onde $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, e e, a carga elementar, tem o valor aproximado $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C

Será mostrado mais para frente que essas propriedades fundamentais tem consequências de longo alcance.

A interação entre cargas é realizada através de um campo. Qualquer carga elétrica q altera de certa forma as propriedades do espaço que a rodeia, ou seja, cria um campo elétrico. Isso significa que outra carga de “teste” colocada em algum ponto do campo experimenta a ação de uma força. Experimentos mostram que a força $\vec{F}$ atuando sobre uma carga pontual de teste fixa q' pode sempre ser representada na forma

$$\vec{F} = q'\vec{E},$$

onde o vetor $\vec{E}$ é chamado de intensidade do campo elétrico em um determinado ponto. A equação anterior mostra que o vetor $\vec{E}$ pode ser definido como a força que atua sobre uma carga unitária fixa positiva.

Lei de Coulomb: O campo elétrico devido a uma carga pontual fixa q, na distância r da carga, tem a forma

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\hat{r},$$

onde ε_0 é uma constante elétrica (*permissividade do vácuo*) e $\hat{r}$ é um vetor unitário na direção que passa pelo ponto onde esta la carga q e o ponto onde queremos achar o campo elétrico.

Agora vamos ver alguns exemplos

Exemplo 1. Qual deve ser a distância entre dois prótons para que o módulo da força eletrostática agindo em qualquer um devido ao outro seja igual à magnitude da força gravitacional sobre um próton na superfície da Terra?

Solução: A magnitude da força gravitacional sobre um próton próximo à superfície da Terra é $F_g = m_p g$, onde $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg é a massa do próton. Por outro lado, a força eletrostática entre dois prótons separados por uma distância l é

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{l^2}.$$

Quando ambas as forças são iguais obtemos

$$m_p g = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{l^2} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{e}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_p g}} \approx 0.0119 \text{ m}.$$

A força eletrostática a esta distância é $F_e \approx 1.64 \cdot 10^{-26}$ N.

Exemplo 2. Da carga Q de uma pequena esfera, uma fração α deve ser transferida para uma segunda esfera próxima. As esferas podem ser tratadas como partículas. Qual valor de α maximiza o módulo F da força eletrostática entre as duas esferas? Quais são os valores menores e maiores de α que colocam F na metade da magnitude máxima?

Solução: As duas cargas das esferas são $q = \alpha Q$ (onde α é um número puro presumivelmente menor que 1 e maior que zero) e $Q - q = (1 - \alpha)Q$. Por isso,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)Q^2}{l^2},$$

onde l representa a distância entre as esferas. O gráfico abaixo (ver Fig 1), de F versus α, apresenta uma dependência quadrática, então $\alpha_m = 1/2$ (só precisamos calcular o vértice da parábola). Então

$$F_{\max} = F_{\alpha=\alpha_m} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{l^2}.$$

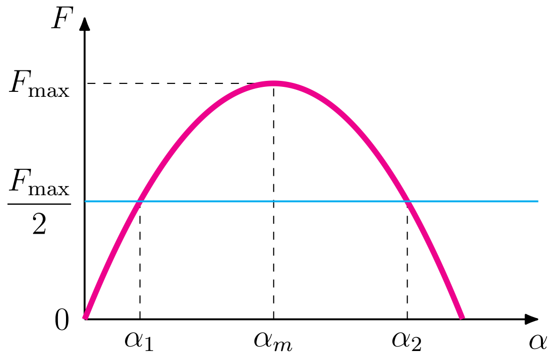

Figura 1

Quando $F = F_{\max}/2$, obtemos

$$\frac{1}{32\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{l^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)Q^2}{l^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha(1-\alpha) = \frac{1}{8}.$$

Finalmente encontramos os valores

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{1}$$

Exemplo 3. Que carga Q adquiriria uma esfera de cobre de raio $R = 10$ cm se todos os elétrons de condução pudessem ser extraídos dela? A massa atômica do cobre é $A = 64$ e sua densidade $\rho = 8.9$ g/cm^3. Considere que por cada átomo de cobre corresponde um elétron de condução.

Solução: Se você tira um elétron de cada átomo de cobre (Cu), existirá um excesso de uma carga elemental positiva em cada átomo. A carga da esfera será então $Q = ne$, onde n é o número de átomos que tem a esfera. Ou seja temos que

$$\frac{n}{N_A} = \frac{m}{A} \quad \Rightarrow \quad n = m\frac{N_A}{A} = \rho V \frac{N_A}{A} = \frac{4\pi\rho R^3}{3} \cdot \frac{N_A}{A}.$$

Finalmente a carga da esfera é

$$Q = \frac{4\pi e\rho R^3}{3} \cdot \frac{N_A}{A} \approx 5.7 \cdot 10^7 \text{ C}.$$

Exemplo 4. 1 cm^3 de água foi dividido em cargas com signos contrários e então as cargas foram separadas a uma distância de 1 m. Com que forças essas cargas serão atraídas?

Solução: Primeiro vamos achar o numero de eléctrons e prótons na molécula de água (H_2O). A molécula está formada por 2 átomos de hidrogênio (H) e um átomo de oxigênio (O), se olhamos a tabela periódica podemos achar os números atômicos destes elementos: $Z_{\mathrm{H}} = 1$ e $Z_{\mathrm{O}} = 8$. O número atômico de um elemento representa a quantidade de carga positiva (número de prótons) no seu núcleo, então o numero de prótons na molécula de H_2O será $n_+ = 2Z_{\mathrm{H}} + Z_{\mathrm{O}} = 10$. A carga positiva da molécula será então $q_+ = en_+$

com $e \approx 1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Como cada átomo é eletricamente neutro, a molécula também é eletricamente neutra ($n_+ = n_-$) e sua carga negativa é $q_- = -en_-$.

Retomando o nosso problemas temos um volume V de $\mathrm{H_2O}$, então para determinar as cargas positiva e negativa neste volume temos que achar o numero de moléculas de água contidas nele. A massa de água neste volume pode ser calculada como $m = \rho_{\mathrm{H_2O}} V$, onde $\rho_{H_2O} \approx 0.998$ g/cm^3 é a densidade do água. O número de moléculas pode ser calculado como

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu_{\mathrm{H_2O}}} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\rho_{\mathrm{H_2O}}}{\mu_{\mathrm{H_2O}}} V N_A,$$

onde $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} é o número de Avogadro, e $\mu_{\mathrm{H_2O}} \approx 18.01$ g $\cdot$ mol^{-1} é a massa molar do $\mathrm{H_2O}$. Finalmente as cargas positiva e negativa no volume de $\mathrm{H_2O}$ serão

$$Q_- = -Q+, \quad \text{onde} \quad Q_+ = Nq_+ = en_+ \frac{\rho_{\mathrm{H_2O}}}{\mu_{\mathrm{H_2O}}} V N_A.$$

A forção de interação entre cargas é dada pela lei de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q_+ Q_-|}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{en_+}{d} \frac{\rho_{\mathrm{H_2O}}}{\mu_{\mathrm{H_2O}}} V N_A \right)^2$$

ou seja que $F \approx 2.57 \cdot 10^{19}$ N.

Exemplo 5. Duas pequenas esferas carregadas igualmente, cada uma com massa m, estão suspensas, a partir de um mesmo ponto, por fios de seda de comprimento l. A distância entre as esferas é $x \ll l$. Encontre a proporção $\Delta q/\Delta t$ com a qual a carga escapa de cada esfera, considerando que sua velocidade de aproximação varia conforme $v = \alpha/\sqrt{x}$, onde α é uma constante.

Solução: Vamos considerar o momento de tempo quando as esferas estão separados uma distância x e os fios formando um ângulo θ respeito à vertical (ver Fig 2).

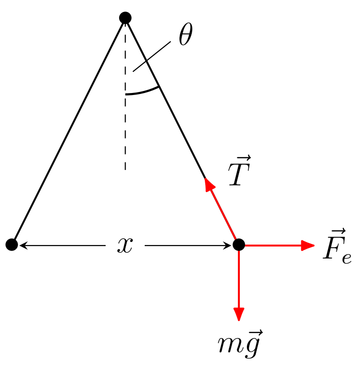

Figura 2

Aplicando a segunda lei de Newton na direção vertical obtemos

$$T \cos(\theta) - mg = 0,$$

e na direção horizontal

$$T\sin(\theta) - F_e = 0 \quad \Rightarrow \quad T\sin(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{x^2}.$$

Omitindo T das equações anteriores achamos que

$$\tan(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{mgx^2}.$$

Pela Fig 2 temos que

$$\tan(\theta) = \frac{x}{2\sqrt{l^2 - x^2/4}} = \frac{x}{2l}\left(1 - \frac{x^2}{4l^2}\right)^{-1/2} = \frac{x}{2l},$$

na ultima igualdade utilizamos o fato que $x \ll l$. Igualando ambas as expressões para $\tan(\theta)$ obtemos uma expressão para a carga elétrica instantânea das esferas, ou seja

$$\frac{x}{2l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{mgx^2} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mgx^3}{l}}.$$

Suponha agora que no pequeno tempo Δt a distância entre esferas passa de x até $x - \Delta x$, onde $\Delta x \ll x$, e sua carga passa de q até $q - \Delta q$. É claro que

$$\Delta q = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg(x-\Delta x)^3}{l}} - \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mgx^3}{l}} = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mgx^3}{l}}\left[\left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right)^{3/2} - 1\right],$$

ou seja que

$$\Delta q = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mgx^3}{l}}\cdot\left(-\frac{3}{2}\frac{\Delta x}{x}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mgx}{l}}\Delta x.$$

Dividindo por Δt e utilizando que $v = -\Delta x/\Delta t$, obtemos

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mgx}{l}}v = \frac{3\alpha}{2}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l}}.$$

Exemplo 6. Sete cargas idênticas q estão unidas por fios iguais elásticos na forma de hexágono regular. Depois de deixar as cargas livres, os comprimentos dos fios ficaram iguais a l. Determine a tensão em cada fio.

Solução: Neste casso temos um problema altissimamente simétrico dado pela geometria hexagonal e a igualdade das cargas. Como antes e depois que o sistema fica livre os comprimentos dos fios elásticos são iguais, podemos concluir que a deformação de cada um deles é igual, então as forças de tenção também são iguais.

Para resolver o problema vamos considerar três "categorias" diferentes de cargas respeito qualquer uma das cargas que estão nos vértices do hexágono: categoria 1 são as três cargas que estão na distância l da carga de prova, categoria 2 são as duas cargas que estão na distância $\sqrt{3}l$ da carga de prova, finalmente categoria 3 é a carga que esta na distância $2l$ (vértice oposto) da carga de prova (ver Fig 3).

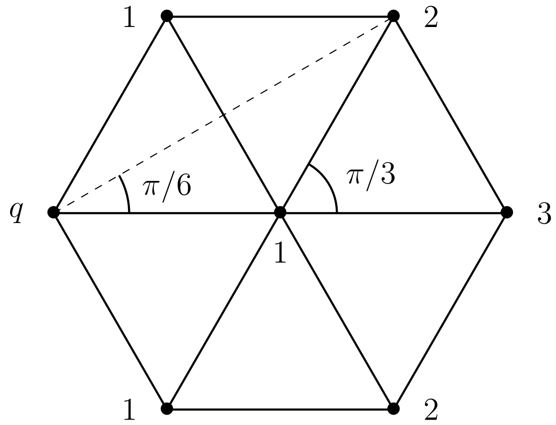

Figura 3

Utilizando a segunda lei de Newton na direção que junta a carga de prova com o centro do hexágono, podemos escrever

$$T + 2T\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = F_1 + 2F_1\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2F_2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + F_3,$$

onde usando que $\cos(\pi/3) = 1/2$ e $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, obtemos

$$2T = 2F_1 + \sqrt{3}F_2 + F_3 = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{l^2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(\sqrt{3}l)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2l)^2}.$$

Utilizando álgebra simples podemos escrever

$$T = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{l^2}\left(\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$