ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Repulsão Gravitacional

São Paulo | 14 de Março de 2024.

Resumo

Estas notas foram traduzidas do russo e modificadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP). O artigo original corresponde a B.BOPOHOBB do jornal KBAHT (N° 03-2009).

A *lei de Gravitação Universal* está entre as leis físicas fundamentais. Parece que não há razão para duvidar da validade de sua tese principal sobre a atração mútua dos corpos na natureza. No entanto, existem situações em que a gravidade leva a efeitos completamente inesperados. São esses casos incomuns que vão ser tratados nestas notas.

Vamos imaginar um universo infinito cheio de água, e vamos nos fazer a seguinte pergunta: Como os diferentes corpos neste universo aquático interagirão entre si? Parece que a resposta é óbvia: Eles se atrairão, obedecendo à lei de gravitação universal. Mas ..., é melhor você não tirar conclusões precipitadas. Vejamos alguns casos especiais.

Primeiro, vamos examinar a interação de duas esferas. Vale ressaltar desde já que o termo "interação" não é muito adequado aqui, uma vez que as esferas são afetadas não apenas pela força de atração gravitacional mútua, mas também pela gravidade do universo e pelas forças elásticas do médio aquático. Em primeiro lugar, tentaremos levar em consideração todas as forças de natureza gravitacional.

Falemos apenas de interação gravitacional: Consideremos um sistema de duas esferas, 1 e 2, dentro do universo aquático, e analisemos as forças que atuam na esfera 1 (ver Fig 1). Vamos desenhar um plano através do seu centro, perpendicular à linha que liga os centros das duas esferas. O plano dividirá o universo aquático em dois semi-universos. Por conveniência, vamos chamá-los esquerdo e direito. Esses dois semi-universos são simétricos em relação ao plano que os separa, mas no semi-universo direito há uma esfera adicional, a esfera 2. As partes simétricas dos semi-universos atuam na esfera 1 com forças de atração completamente iguais. A força total na esfera 1 é então, o resultado da ação de dois *elementos esféricos* diferentes: a esfera 2 no semi-universo direito e um volume esférico de água (igual ao volume da esfera 2) que está localizado no semi-universo esquerdo simetricamente respeito ao centro

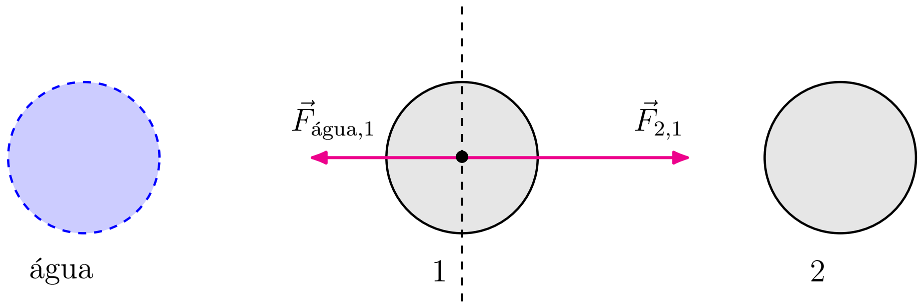

Figura 1:

da esfera 1. Vamos supor que a densidade das esferas é maior que a densidade da água, então a força total $\vec{F_1}$ que atua na esfera 1 será direcionada à direita, mas será menor que a força de atração gravitacional com a esfera 2. Vamos calcular esta força

$$F_1 = F_{2,1} - F_{\text{água},1} = G\frac{m_2 m_1}{r^2} - G\frac{m_{\text{água}} m_1}{r^2},$$

onde r é a distância entre o centro das esferas nos semi-universos até o plano que os divides. Como as duas esferas são iguais temos que $m_1 = m_2 = m$, então

$$F_1 = F_{2,1} - F_{\text{água},1} = G\frac{m^2}{r^2} - G\frac{m_{\text{água}} m}{r^2} = G\frac{m^2}{r^2}\left(1 - \frac{m_{\text{água}}}{m}\right).$$

Utilizando as relações $m = \rho V$ e $m_{\text{água}} = \rho_{\text{água}} V$, onde ρ e $\rho_{\text{água}}$ são as densidades das esferas e do meio aquoso respetivamente, obtemos

$$F_1 = G\frac{m^2}{r^2}\left(1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho}\right).$$

É fácil notar que no caso de duas esferas de diferente volume e igual densidade dentro de um universo aquoso a força gravitacional que atua em uma das esferas (por exemplo a esfera 1) é

$$F_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(1 - \frac{\rho_{\text{meio}}}{\rho_{\text{esfera}}}\right).$$

Analisando a última expressão você pode nota que no caso $\rho_{\text{meio}} = 0$ obtemos a lei de gravitação universal já que neste caso estamos analisando a interação de duas esferas no vácuo. No caso que $\rho_{\text{meio}} = \rho_{\text{esfera}}$ obtemos $F_1 = 0$ que também tem muito sentido se consideramos que neste caso estamos calculando a força gravitacional que atua em um elemento esférico de um universo de densidade ρ_{meio} devido a todo o universo que não forma parte do elemento.

Se a densidade do meio aumenta gradualmente, a força de atração mútua diminuirá até se tornar zero (caso $\rho_{\text{meio}} = \rho_{\text{esfera}}$ analisado anteriormente). No caso quando a densidade do meio for maior que a densidade das esferas, então a força F_1 se tornará negativa, o que corresponde à repulsão das esferas. Assim, duas esferas de densidade $\rho_{\text{esfera}} < \rho_{\text{meio}}$ (por exemplo, duas esferas de madeira em um universo aquoso) se repelirão com a força:

$$F_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\left|1 - \frac{\rho_{\text{meio}}}{\rho_{\text{esfera}}}\right|.$$

Assim, *a gravidade pode gerar repulsão!*

Este efeito de repulsão mútua pode ser explicado levando-se em consideração os *campos* gerados pela introdução de um elemento de de uma substância em um meio homogêneo infinito, se a densidade do meio e da substância são diferentes. O aparecimento de matéria mais densa leva à criação de um *campo de gravidade*. A gravidade é criada apenas devido ao excesso de densidade no volume de matéria respeito ao meio. Se a densidade da substância for menor que a densidade do meio, surge um *campo de repulsão*. A peculiaridade desses campos é que eles manifestam suas propriedades independentemente da substância (com densidade maior ou menor que a densidade do meio) sobre a qual atuam. A intensidade de tal campo (estamos falando de um *campo central*) pode ser calculada usando usando a formula

$$g = G\frac{m_{\text{substância}}}{r^2}\left|1 - \frac{\rho_{\text{meio}}}{\rho_{\text{substância}}}\right|.$$

Agora vamos analisar um caso mais complexo. Até agora consideramos esferas que tem a mesma densidade. Mas, como interagirão corpos com densidades diferentes? Para ser mais específicos, vamos considerar uma esfera de madeira e uma esfera de ferro em um meio aquoso. O ferro, por ter um excesso de densidade, cria um campo de gravidade e por isso atrairá a esfera de madeira (ver Fig 2). A madeira, por ter densidade insuficiente, cria um

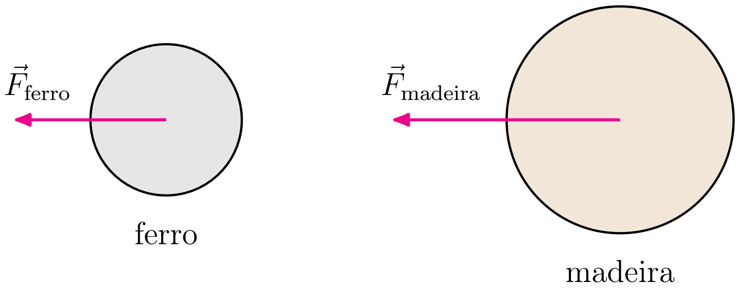

Figura 2:

campo de repulsão e, portanto, repelirá a esfera de ferro. Assim, as forças que atuam nas esferas de ferro e madeira serão direcionadas na mesma direção. Pode-se mostrar que neste caso o módulo de cada força é

$$F_{\text{madeira}} = G\frac{m_{\text{ferro}}m_{\text{madeira}}}{r^2}\left|1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ferro}}}\right|,$$

$$F_{\text{ferro}} = G\frac{m_{\text{madeira}}m_{\text{ferro}}}{r^2}\left|1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{madeira}}}\right|.$$

Mas fica tranquilo! A violação da terceira lei de Newton (as forças não são direcionadas uma para outra, e no caso geral, não são iguais em magnitude) é apenas aparente. O fato é que as forças descritas pelas últimas fórmulas não são verdadeiras forças de interação. Justamente com a interação gravitacional dos corpos, estas fórmulas levam em consideração a influência gravitacional do universo gerada pela sua assimetria em relação a cada um dos corpos. Neste caso a diferença nas forças é precisamente gerada pela influência diferente do universo sobre as duas esferas.

Resumindo, podemos notar que levar em conta todas as forças de natureza gravitacional mostra que a lei de gravitação universal causa não apenas atração dos corpos. Mas é preciso lembrar que ainda não levamos em consideração a presença de forças elásticas no meio aquático.

Adicionemos as forças arquimedianas: Parece bastante óbvio que num universo aquático homogêneo a pressão é a mesma em todos os pontos. A força arquimediana surge apenas quando aparece uma inclusão não homogênea no universo. Vamos calcular esta força para o caso em que ela é causada pelo aparecimento de uma esfera de chumbo.

Vamos considerar um volume esférico de água selecionado arbitrariamente (ver Fig 3). O elemento esférico de água está em repouso, o que significa que a força que atua a partir

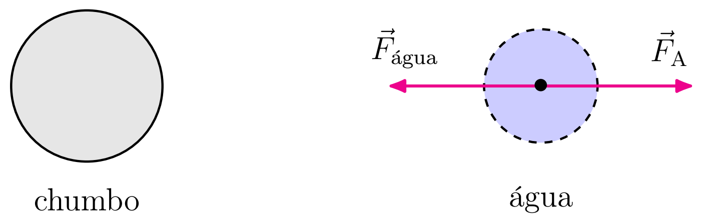

Figura 3:

do campo de gravidade da esfera de chumbo é completamente compensada pela força de Arquimedes. Vamos achar esta força:

$$F_A = F_{\text{água}} \quad \Rightarrow \quad F_A = m_{\text{água}} g_{\text{chumbo}} = \rho_{\text{água}} V_{\text{água}} g_{\text{chumbo}}.$$

Obviamente, esta fórmula, que lembra tanto a versão escolar clássica $F_A = \rho V g$, também pode ser usada para o campo de repulsão (neste caso também será dirigida contra o campo).

Agora você pode tentar levar em conta todas as forças. Voltemos ao caso de duas esferas de chumbo, 1 e 2. A força total F_1 que atua sobre a primeira esfera é igual a soma vetorial da força causada pelo campo de gravidade da segunda esfera e a força de Arquimedes (ver Fig 4)

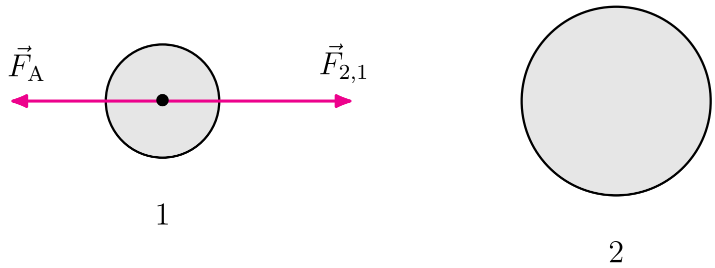

Figura 4:

$$F_1 = F_{2,1} - F_A = m_1 g_2 - \rho_{\text{água}} V g_2 = m_1 g_2 \left(1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{chumbo}}}\right),$$

ou seja que

$$F_1 = m_1 \left(1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{chumbo}}}\right) G \frac{m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{chumbo}}}\right) = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{chumbo}}}\right)^2.$$

A completa simetria desta fórmula em relação aos índices mostra que a força total que atua sobre a segunda esfera será a mesma em magnitude. O quadrado da expressão entre colchetes nesta fórmula também não é acidental. Se a densidade do meio que a densidade da substância, o sinal da força não muda. Então as esferas de madeira no universo aquático também se atrairão. A última fórmula pode ser escrita de uma forma mais geral:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(1 - \frac{\rho_{\text{maio}}}{\rho_{\text{substância}}}\right)^2.$$

No entanto, esta fórmula não pode er usada para calcular forças que atuam em corpos com densidades diferentes. Voltemos à situação da esfera de madeira e a esfera de ferro. Vamos encontrar a força que atua na esfera de ferro. A bola de madeira cria um campo de repulsão, mas a força de Arquimedes atua na direção oposta (ver Fig 5). Encontramos a

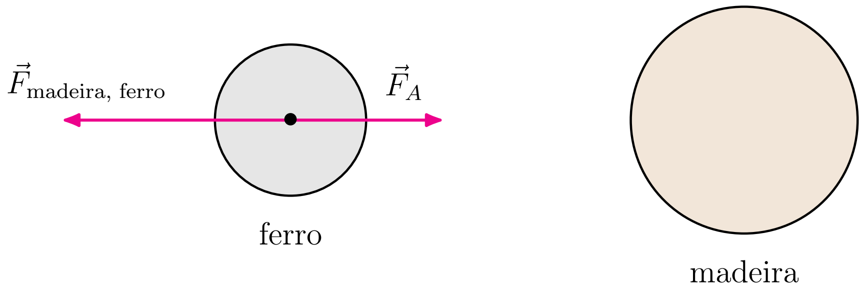

Figura 5:

força total $\vec{F}_{\text{ferro}}$ como a soma vetorial das forças correspondentes

$$F_{\text{ferro}} = F_A - F_{\text{madeira, ferro}} = \rho_{\text{água}} V_{\text{ferro}} g_{\text{madeira}} - m_{\text{ferro}} g_{\text{madeira}} = m_{\text{ferro}} g_{\text{madeira}}\left(\frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ferro}}} - 1\right),$$

finalmente obtemos

$$F_{\text{ferro}} = m_{\text{ferro}}\left(\frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ferro}}} - 1\right) G\frac{m_{\text{madeira}}}{r^2}\left(1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{madeira}}}\right) = G\frac{m_{\text{ferro}} m_{\text{madeira}}}{r^2}$$

$$F_{\text{ferro}} = G\frac{m_{\text{ferro}} m_{\text{madeira}}}{r^2}\left(\frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ferro}}} - 1\right)\left(1 - \frac{\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{madeira}}}\right).$$

Vemos que $F_{\text{ferro}} < 0$, o que a força repulsiva é maior que a força de Arquimedes. Assim, a esfera de madeira e a esfera de ferro se repelirão. Pode-se mostrar que uma força da mesma magnitude, mas na direção oposta, atuará sobre a esfera de madeira.

Assim, a fórmula gral que descreve a "interação" de dois corpos em um universo líquido infinito tem a seguinte forma:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(\frac{\rho_1 - \rho_{\text{maio}}}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_2 - \rho_{\text{maio}}}{\rho_2}\right).$$

É óbvio no caso particular em que as densidades dos corpos são iguais, independentemente da sua relação com a densidade do meio, estes corpos serão atraídos entre si ($F > 0$). A atração também será observada no caso em que as densidades não são iguais, mas ambas são maiores ou menores que a densidade do meio. Então as expressões entre colchetes na última fórmula terão o mesmo sinal e a força será positiva. A repulsão dos corpos só é possível quando a densidade de um corpo é maior que a densidade do meio e a densidade do outro é menor. Neste caso, a força muda de sinal para negativo, o que indica a repulsão dos corpos. Se a densidade de um dos corpos coincidir com a densidade do meio, a força torna-se zero.