ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Satélites e Movimento Elíptico

São Paulo | 25 de fevereiro de 2024.

Resumo

Estas notas foram traduzidas do russo e modificadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP). O artigo original corresponde a B.ДРОЗДОВ do jornal KBAHT (N° 03-2012).

Considere o movimento elíptico de um corpo - por exemplo, um planeta ou seu satélite - neste caso o corpo tem sua aceleração variável tanto em magnitude quanto em direção, então a descrição matemática desse movimento é muito difícil. No entanto, as leis de conservação da energia e do momento angular, bem como as leis de Kepler, podem ser de grande ajuda aqui.

Geometria da Elipse: Uma elipse é um conjunto de pontos em um plano para os quais a soma das distâncias de dois pontos dados - focos F_1 e F_2 - é uma constante: $r_1 + r_2 = 2a$ (ver Fig 1).

A equação de uma elipse em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, cujo centro coincide com o centro da elipse, tem a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } b^2 = a^2 - c^2.$$

Esta equação é chamada de equação canônica da elipse. Quando $b = a$ a equação da elipse se transforma na equação de um círculo $x^2 + y^2 = a^2$ com raio a e com centro na origem. Os eixos de uma elipse são seus eixos de simetria. O centro da elipse é o seu centro de simetria O, ou seja, o ponto de intersecção dos eixos de simetria. Os vértices da elipse são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 nos quais a elipse intercepta seus eixos. O comprimento do semieixo maior da elipse é $A_1A_2 = 2a$, o comprimento do semieixo maior é $A_1O = A_2O = a$. O comprimento do eixo menor da elipse é $B_1B_2 = 2b$, o comprimento do semieixo menor é $B_1O = B_1O = b$. A área da elipse é $S = \pi ab$. Os comprimentos dos segmentos $F_1N = r_1$ e $F_2N = r_2$ são chamados de raios focais do ponto N. A excentricidade de uma elipse é a razão entre a distância entre seus focos e o comprimento do eixo maior:

$$\epsilon = \frac{F_1F_2}{A_1A_2} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

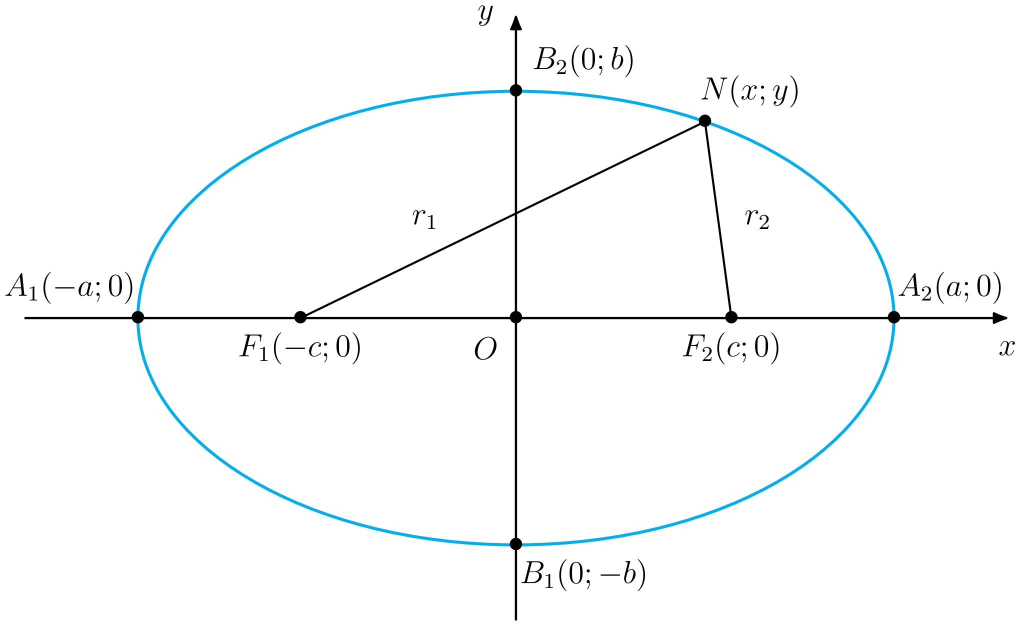

Figura 1:

Como $c^2 = a^2 - b^2$, então

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Obviamente, a excentricidade do círculo é zero.

Leis de Conservação de Energia e Momento Angular: Vamos considerar um satélite de massa m movendo-se em uma órbita elíptica (ver Fig. 2) em torno de seu planeta de massa M, onde consideraremos que $M \gg m$. A energia mecânica total do satélite é igual a

$$W = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r^2},$$

onde v é a velocidade do satélite, r é a distância entre o satélite e o planeta, G é a constante gravitacional. Devido à lei da conservação da energia, o valor de W é constante no tempo, ou seja, continua sem alteração

$$W = \text{const.}$$

O momento angular do satélite é igual ao produto vetorial de seu vetor raio $\vec{r}$ e o momento $m\vec{v}$:

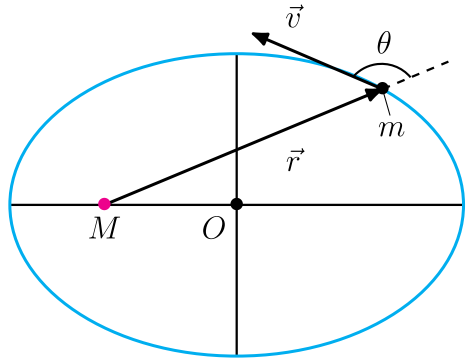

Figura 2:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Neste caso, o vetor $\vec{L}$ é perpendicular ao vetor $\vec{r}$ e ao vetor $m\vec{v}$, e a magnitude do momento angular é igual a

$$L = mvr \sin(\theta).$$

Vamos determinar os valores de W e L para movimento elíptico - isso será útil na solução subsequente de problemas. De acordo com a lei da conservação da energia temos (Fig 3)

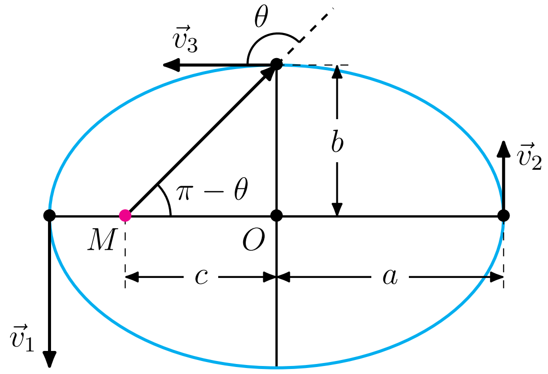

Figura 3:

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{Mm}{a-c} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{a+c},$$

de onde obtemos

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{4GMc}{a^2 - c^2} = \frac{4GMc}{b^2}.$$

Da lei da conservação do momento angular segue que

$$v_1\,(a-c) = v_2\,(a+c) = v_3 r \sin(\theta).$$

Mas $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) = b/r$, então

$$v_1 = \frac{bv_3}{a-c}, \text{ e } v_2 = \frac{bv_3}{a-c}.$$

Por isso,

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{4acb^2v_3^2}{(a^2-c^2)^2} = \frac{4acv_3^2}{b^2}.$$

Comparando as duas expressões para $v_1^2 - v_2^2$, obtemos

$$v_3^2 = \frac{GM}{a},$$

e para a energia obtemos a expressão

$$W = \frac{mv_3^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2a}.$$

Para determinar o momento angular do satélite, escrevemos o sistema óbvio de equações:

$$L = mv_3 b,$$

$$v_3^2 = \frac{GM}{a},$$

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Excluindo primeiro v_3 e depois b dele, podemos facilmente chegar ao seguinte resultado:

$$L = m\sqrt{GMa\,(1-\epsilon^2)}.$$

Leis de Kepler: Johannes Kepler (1571–1639), um astrônomo e matemático alemão mundialmente famoso, resumiu dados observacionais e estabeleceu as seguintes leis do movimento planetário:

1. Cada planeta se move ao longo de uma elipse, em um dos focos da qual está o Sol.
2. O raio vetor do planeta descreve áreas iguais em períodos iguais de tempo.
3. Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas ao redor do Sol estão relacionados como os cubos dos semieixos maiores de suas órbitas.

Exemplos Resolvidos: Vamos considerar tarefas específicas. Problemas desse tipo podem ser oferecidos em olimpíadas e exames complementares em universidades com maiores exigências em física.

Exemplo 1. Um satélite de massa m se move em torno de uma estrela de massa $M \gg m$ em uma órbita elíptica com semieixo maior a e excentricidade ϵ. Determine a velocidade do satélite v no momento em que ele está a uma distância r do centro da estrela. Quais são as velocidades máxima $v_{\max}$ e mínima $v_{\min}$ do satélite?

Solução: Devido à lei da conservação da energia, temos a equação

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2a},$$

a partir do qual obtemos imediatamente a velocidade necessária:

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}.$$

Obviamente, a velocidade máxima é alcançada no mínimo r, ou seja, no *pericentro*, quando $r = a - c = a(1 - \epsilon)$. Cálculos dão

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)}.$$

Também está claro que a velocidade mínima é alcançada no máximo r, ou seja, no *apocentro*, quando $r = a + c = a(1 + \epsilon)$:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)}.$$

Exemplo 2. Um satélite se move em torno de um planeta de massa M em uma elipse com os semieixos maior e menor a e b, respectivamente. Encontre o período orbital T do satélite. Determine a área S que o raio vetor desenhado do centro do planeta até o satélite "varre" por unidade de tempo

Solução: Segue-se da terceira lei de Kepler que o período de revolução requerido T coincide com o período de revolução de um satélite movendo-se em uma órbita circular de raio a. No caso da órbita circular temos que a força de gravidade tem caráter centrípeto, então:

$$G\frac{Mm}{a^2} = ma_C = m\omega^2 a \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}},$$

onde $\omega = 2\pi/T$ é a frequência cíclica do satélite. Finalmente temos que

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}.$$

Note que o período da órbita é igual ao comprimento da órbita circular $2\pi a$ dividido pela *velocidade de escape* $\sqrt{GM/a}$. Pense como calcular a primeira velocidade de escape. Como durante o tempo T o vetor raio "varre" uniformemente a área da elipse igual a πab, então por unidade de tempo ele "varre" a área

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

Exemplo 3. Encontre a razão entre os tempos em que o cometa atravessa as seções da órbita elíptica delimitadas pelo semieixo menor da elipse com excentricidade ϵ.

Solução: Seja t_1 o tempo de movimento do cometa ao longo do arco BDC, e t_2 o tempo de movimento do cometa ao longo do arco CEB (ver Fig 4). Então, de acordo com a segunda lei de Kepler, a razão de tempo necessária é igual a

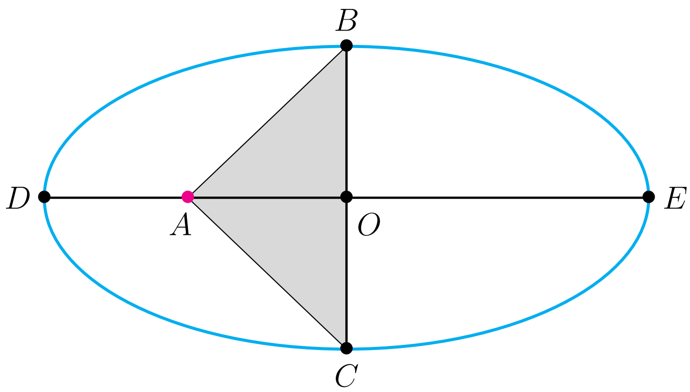

Figura 4:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{S_2}{S_1}, \text{ onde } S_1 = \frac{\pi ab}{2} - S_{\Delta ABC} \text{ e } S_2 = \frac{\pi ab}{2} + S_{\Delta ABC}$$

– a área das partes correspondentes da elipse. É óbvio que

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AO = bc = ab\epsilon.$$

Portanto finalmente conseguimos

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{[ab(\pi + 2\epsilon)]/2}{[ab(\pi - 2\epsilon)]/2} = \frac{\pi + 2\epsilon}{\pi - 2\epsilon}.$$

Exemplo 4. Qual é a distância máxima r_2 do Sol da qual o cometa Halley se afasta? O período de sua revolução em torno do Sol do cometa é $T = 76$ anos, a distância mínima do Sol é $r_1 = 1.8 \cdot 10^8$ Km O raio da órbita da Terra é $R = 1.5 \cdot 10^8$ km.

Solução: Vamos comparar, utilizando a terceira lei de Kepler, os parâmetros dos movimentos do cometa e da Terra em torno do Sol (ver Fig 5):

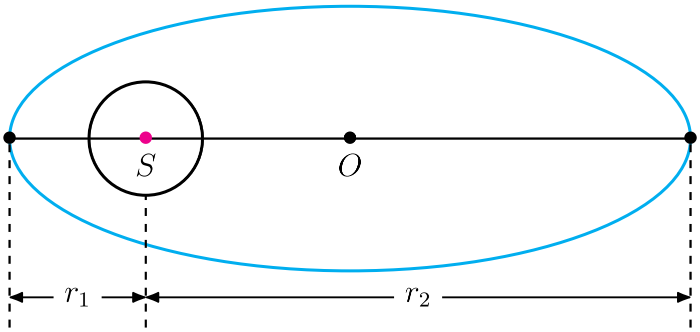

Figura 5: Órbita ciano elíptica é do cometa Halley e órbita preta circular é da Terra

$$\frac{T^2}{T_T^2} = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{R^3},$$

onde T_T é a duração do ano terrestre. A partir daqui encontramos

$$r_2 = 2R\left(\frac{T}{T_T}\right)^{2/3} - r_1 = 5.2 \cdot 10^9 \text{ Km}.$$

Exemplo 5. O período de revolução de um corpo em uma órbita circular em torno do centro de gravidade é igual a T. Calcule o tempo t do corpo caindo da órbita até o centro de gravidade se a velocidade do corpo instantaneamente fosse zero.

Solução: Vamos realizar um experimento mental. Deixe o corpo se mover em torno do centro de gravidade ao longo de uma elipse muito alongada com uma excentricidade que difere infinitamente pouco da unidade (ver Fig 6).

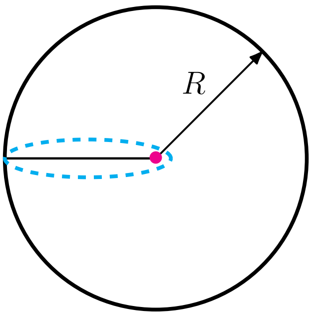

Figura 6:

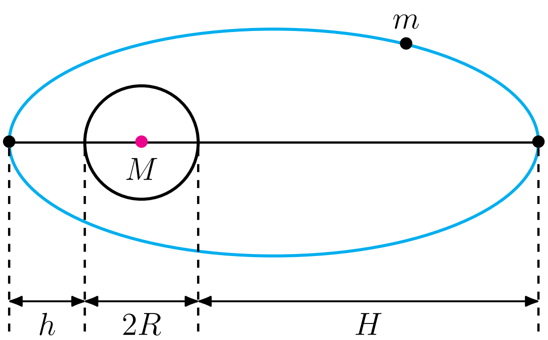

Figura 7:

Então o comprimento de tal elipse com grande precisão é igual a $2R$, onde R é o raio da órbita circular. Por razões de simetria, o tempo que o satélite se aproxima do centro de gravidade é igual ao tempo que ele se afasta dele. Aplicando a terceira lei de Kepler a ambos os corpos, obtemos a equação

$$\frac{(2t)^2}{T^2} = \frac{(R/2)^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{2}}{8}T.$$

Exemplo 6. A órbita da espaçonave Vostok tinha os seguintes parâmetros: altitude no perigeu $h = 181$ Km, altitude no apogeu $H = 327$ Km. Calcule o período orbital T da espaçonave Vostok se o raio da Terra $R = 6371$ Km

Solução: Primeiro, determinamos o período de revolução de um satélite artificial da Terra voando baixo em uma órbita circular:

$$T_0 = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

O semieixo maior da órbita elíptica da espaçonave Vostok é obviamente igual a $R+(H+h)/2$ (ver Fig 7). Resta aplicar a terceira lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{[R+(H+h)/2]^3}{R^3} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{H+h}{2R}\right)^{3/2} = 89.4 \text{ min.}$$

Exemplo 7. Dois foguetes são lançados do polo da Terra: um verticalmente para cima e outro horizontalmente. As velocidades iniciais de ambos os foguetes são iguais a v_0, e $\sqrt{Rg} < v_0 < \sqrt{2Rg}$, onde R é o raio da Terra. Qual foguete se afastará do centro da Terra e quantas vezes?

Solução: Obviamente, o primeiro foguete cairá no local de lançamento e o segundo se moverá ao longo de uma elipse (ver Fig 8). Deixe o primeiro foguete se afastar do centro da Terra até uma distância máxima de r_1. De acordo com a lei da conservação da energia,

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{r_1},$$

de onde

$$r_1 = \frac{2GMR}{2GM - v_0^2 R}.$$

Deixe o segundo foguete se afastar do centro da Terra até uma distância máxima de r_2. Em virtude da lei da conservação da energia, temos

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2a}, \text{ onde } 2a = r_2 + R.$$

Então achamos que

$$r_2 = \frac{R^2 v_0^2}{2GM - Rv_0^2}.$$

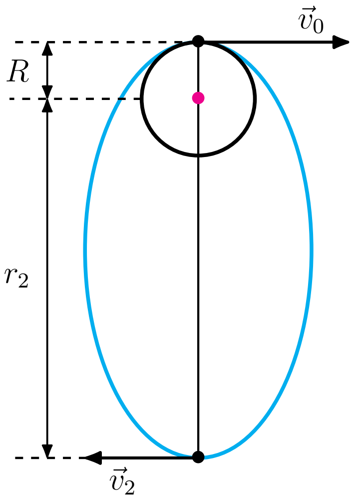

Figura 8:

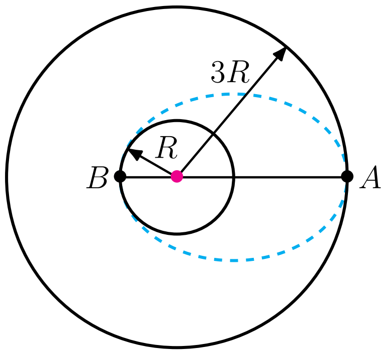

Figura 9:

Por isso,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2Rg}{v_0^2} > 1,$$

ou seja, o primeiro foguete se afastará mais do centro da Terra do que o segundo.

Exemplo 8. Um satélite se move ao redor da Terra em uma órbita circular com raio $3R$ (ver Fig 9), onde R é o raio da Terra. Como resultado de uma ação de curto prazo do motor de frenagem, a velocidade do satélite diminuiu de modo que ele se moveu para uma órbita elíptica tocando a superfície da Terra. Depois de quanto tempo t após a frenagem o satélite pousará na Terra?

Solução: Deixe o satélite desacelerar no ponto A e pousar no ponto B. Assim, o satélite passa meio caminho de uma órbita elíptica com semieixo maior de $2R$. Este movimento levará metade do período de revolução T ao longo da elipse:

$$t = \frac{T}{2}.$$

Usando a terceira lei de Kepler, vamos comparar os movimentos de dois satélites

$$\frac{T^2}{\left(2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\right)^2} = \frac{(2R)^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad T = 4\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Então o tempo será

$$t = 2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 119 \text{ min}.$$

Exemplo 9. Um corpo na superfície da Terra recebeu uma velocidade inicial igual à primeira velocidade cósmica $v_0 = \sqrt{Rg}$, onde R é o raio da Terra, direcionada em um ângulo α em relação ao horizonte. Encontre a altura máxima H do corpo acima da superfície da Terra.

Solução: Na Fig 10 as designações e igualdade de ângulos ficam claras devido à simetria em relação ao eixo OB. O corpo se move ao longo da parte ABC da elipse. Apliquemos as leis de conservação da energia e do momento angular às posições do corpo nos pontos A e B:

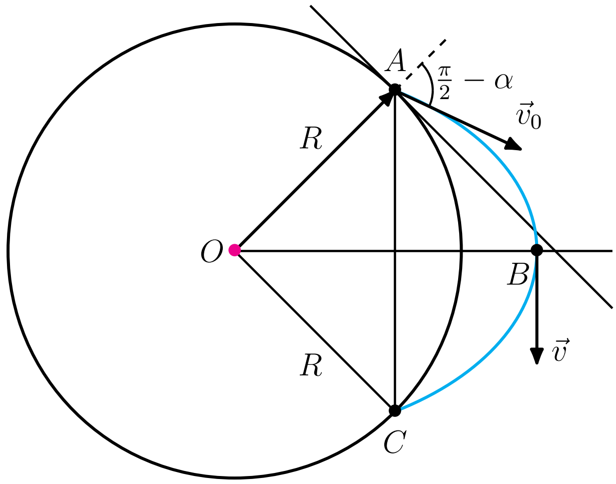

Figura 10:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{R+H},$$
$$mv_0 R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mv(R+H).$$

A partir da primeira equação, levando em consideração o fato de que $v_0^2 = Rg$, encontramos facilmente

$$v = \sqrt{Rg\left(\frac{R-H}{R+H}\right)}.$$

Vamos substituir esse valor na segunda equação

$$\sqrt{Rg}R\cos(\alpha) = \sqrt{Rg(R+H)(R-H)},$$

de onde obtemos

$$H = R\sin(\alpha).$$

Exemplo 10. Um corpo cai na Terra de uma altura igual ao seu raio R, sem velocidade inicial. Encontre o tempo t da queda do corpo.

Solução: Para evitar o uso do cálculo integral, vamos realizar um experimento mental. Deixe o corpo a uma altura R receber uma velocidade horizontal $\vec{v}_0$ arbitrariamente pequena (ver Fig 11). Então, em virtude da primeira lei de Kepler, o corpo se moverá ao longo do arco de uma elipse com semieixo maior igual a R, que difere infinitamente de um segmento de reta. Isso significa que os tempos de movimento curvilíneo e retilíneo do corpo serão iguais. De acordo com a terceira lei de Kepler, o período de revolução de um corpo ao longo de uma elipse T é igual ao período de revolução de um satélite artificial da Terra em órbita circular:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

De acordo com a segunda lei de Kepler,

$$\frac{t}{T} = \frac{S}{\pi R b},$$

onde S é a área sombreada na Fig 11, "varrida" pelo raio vetor do corpo desenhado a partir do centro da Terra, coincidindo com o foco da elipse. É fácil ver que, com um grau razoável de precisão,

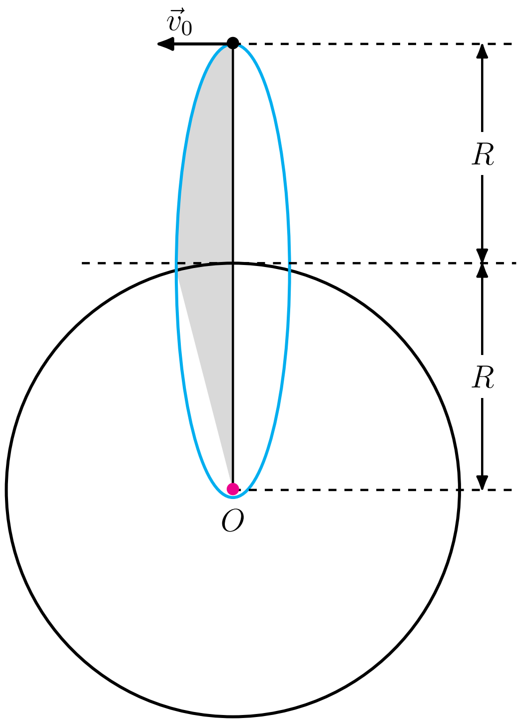

Figura 11:

$$S = \frac{\pi R b}{4} + \frac{Rb}{2},$$

então

$$t = T\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 34 \text{ min}.$$