ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Variação da Órbita

São Paulo | 14 de Março de 2024.

Resumo

Estas notas foram traduzidas do espanhol por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP). O problema original corresponde aos autores E. Bútikov, A. Bíkov, A. Kondrátiev no seu livro *Física em exemplos e problemas.*

Como resultado do equilíbrio nas capas altas da atmosfera, a energia mecânica de um satélite da Terra diminuiu em $\alpha = 2\%$ após muitas voltas. Nesse caso, a órbita do satélite continuou sendo circular. Como mudam os parâmetro da órbita: raio da órbita r, a velocidade v e o período T?

Solução: No sistema de referência fixo na Terra a energia mecânica E do satélite é a soma de sua energia cinética e potencial de interação com a Terra (R e M são o raio e a massa do planeta respectivamente):

$$E(r) = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r}.$$

Como a órbita do satélite é circular, sua velocidade v é constante e está ligada com o raio r da órbita. A força gravitacional tem caráter centrípeto, então:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G\frac{M}{r}.$$

A expressão para a energia do satélite e a expressão para a velocidade podem ser juntadas, então obtemos

$$E(r) = -G\frac{Mm}{r} + G\frac{Mm}{2r} = -G\frac{Mm}{2r}.$$

Vamos analisar a expressão $E(r)$ utilizando seu gráfico. Na Fig 1 é apresentada a dependência das energias potencial, cinética e total do satélite e o raio da órbita circular. Da figura podemos deduzir que o aumento de energia mecânica do satélite conduz ao aumento do raio da órbita. Como com a nossa escolha do origem de coordenadas, a energia total do satélite é sempre negativa, a variação relativa da energia $\Delta E/E$ é positiva durante a sua diminuição ($\Delta E < 0$). Como, o planteamento do problema fala que a energia total diminui em $\alpha = 2\%$, $\Delta E/E$ é positivo e igual a 0.02. A expressão $E(r)$ permite achar a relação entre a variação da energia do satélite com o cambio do raio da órbita Δr:

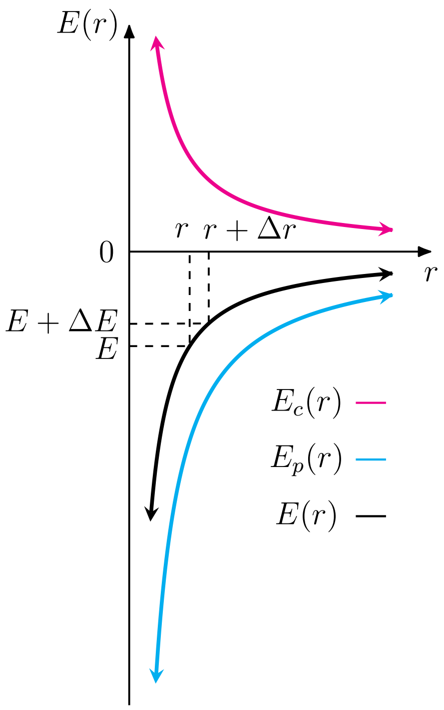

Figura 1:

$$E(r+\Delta r) = -\frac{G}{2}\frac{Mm}{r+\Delta r} = E(r) + \Delta E.$$

O segundo membro da expressão anterior, quando $\Delta r/r \ll 1$, pode-se escrever aproximadamente do seguinte modo

$$-\frac{G}{2}\frac{Mm}{r+\Delta r} = -\frac{G}{2}\frac{Mm}{r(1+\Delta r/r)} \approx -\frac{G}{2}\frac{Mm}{r}\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right) = E(r)\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right).$$

Comparando expressões obtemos que

$$E + \Delta E = E\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta E}{E} = -0.02.$$

O raio da órbita também diminui em 2%.

A variação na velocidade do satélite quando a órbita muda é simples de expressar utilizando a variação do raio da órbita:

$$(v+\Delta v)^2 = \frac{GM}{r+\Delta r}.$$

Como $\Delta v/v \ll 1$, o segundo membro da ultima relação pode-se escrever, aproximadamente, na forma

$$v^2\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^2 \approx v^2\left(1+2\frac{\Delta v}{v}\right).$$

Utilizando a expressão anterior obtemos

$$v^2\left(1+2\frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{GM}{r}\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right),$$

de onde

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta r}{2r} = \frac{\Delta E}{2E} = 0.01.$$

A velocidade do satélite aumento o 1%. Um fato curioso é que o débil frenado do satélite nas capas superiores da atmosfera conduz ao aumento de de sua velocidade.

Só fica determinar a variação do período. É fácil de resolver este problema uma vez que conhecemos $\Delta r/r$ e $\Delta v/v$, já que o período está ligado ao raio da órbita e a velocidade do satélite pela relação $T = 2\pi r/v$. Então podemos escrever

$$T + \Delta T = 2\pi\frac{r+\Delta r}{v+\Delta v} = \frac{2\pi r}{v}\cdot\frac{1+\Delta r/r}{1+\Delta v/v} = T\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{-1}$$

transformando a ultima expressão

$$\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{-1} \approx \left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right) \approx 1+\frac{\Delta r}{r}-\frac{\Delta v}{v},$$

então

$$T + \Delta T = T\left(1+\frac{\Delta r}{r}-\frac{\Delta v}{v}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta v}{v} = -\frac{3\Delta E}{2E} = 0.03.$$

O período do satélite diminui em 3%.