ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

# Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

## Velocidade Média em Linha Reta

São Paulo | 14 de Março de 2024.

**Resumo**

Estas notas foram traduzidas do russo e modificadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP). O artigo original corresponde a Б.МУКУШЕВ do jornal КВАНТ (N° 02-2018).

Na vida cotidiana, quando falamos sobre o movimento de uma pessoa ou veículo, na maioria das vezes nos concentramos na velocidade média. È a velocidade média que permite estimar a distância percorrida, conhecendo o tempo gasto, ou, pelo contrário, ajuda a encontrar o tempo de deslocamento ao longo do caminho percorrido.

Observe que a palavra "média" aqui significa média ao longo do tempo. Há também uma velocidade média calculada pela distância. É usado, por exemplo, em hidrodinâmica.

Todo mundo sabe que a velocidade é uma grandeza vetorial. E a velocidade média? Você precisa estar bem ciente de que existem dois entendimentos possíveis de velocidade média: a velocidade média do movimento e a velocidade média do caminho (ou a velocidade média da estrada). No primeiro caso, a velocidade média será um vetor, no segundo - um escalar.

Nos exemplos relacionados ao trânsito, as pessoas estão mais frequentemente interessadas na distância percorrida - para determinar o consumo de combustível, o grau de desgaste do carro, etc. Portanto, falaremos mais adiante apenas sobre a velocidade média escalar, para determinar a qual é necessário saber o tempo de movimento $t$ e a distância $s$ percorrida durante esse tempo:

$$v_m = \frac{s}{t}.$$

E agora - tarefas específicas.

**Exemplo 1.** Um motociclista anda de moto por uma estrada deserta e muda a velocidade do "salto" ao final de cada minuto: $v_1 = 40$ km/h, $v_2 = 60$ km/h, $v_3 = 80$ km/h, $v_4 = 20$ km/h. Qual é a velocidade média da motocicleta?

*Solução:* O caminho geral consiste em quatro seções diferentes. Em cada trecho onde a velocidade era constante, o carro se moveu pelo mesmo período de tempo $\Delta t$. É por isso

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + v_4\Delta t}{4\Delta t} = \frac{1}{4}\left(v_1 + v_2 + v_3 + v_4\right).$$

Finalmente obtemos que $v_m = 50$ Km/h.

**Exemplo 2.** Na próxima vez que um motociclista anda de moto na rodovia, ele se orienta seguindo os postes telefônicos que margeiam a rodovia. O motociclista "salta" sucessivamente nas velocidades $v_1 = 40$ km/h, $v_2 = 60$ km/h, $v_3 = 80$ km/h, $v_4 = 20$ km/h, ao passar pelo próximo poste. Qual é a velocidade média da motocicleta agora?

*Solução:* Vamos denotar a distância entre os postes telefônicos por $l$. Então toda a distância percorrida é $4l$, e o tempo total do motociclista é a soma dos tempos que leva para percorrer cada trecho. Então obtemos,

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{4l}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{4l}{\dfrac{l}{v_1} + \dfrac{l}{v_2} + \dfrac{l}{v_3} + \dfrac{l}{v_4}},$$

ou seja que

$$v_m = \frac{4}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dfrac{1}{v_3} + \dfrac{1}{v_4}} = 38.4 \text{ Km/h}.$$

Como vemos no primeiro problema, a velocidade média do motocicleta é determinada pela média aritmética das velocidades em cada período de movimento. Infelizmente, muitos alunos acreditam erroneamente que a velocidade média sempre pode ser calculada desta forma. O segundo problema mostra claramente que num movimento em que o corpo percorre o mesmo caminho em cada secção, mas a velocidades diferentes, a velocidade média é expressa de uma forma mais complexa.

**Exemplo 3.** Mostre que em movimento retilíneo uniforme unidirecional, a velocidade média do corpo é determinada pela média aritmética das velocidades inicial e final.

*Solução:* Em movimento uniformemente acelerado com velocidade inicial $v_0$ e aceleração $a$, o caminho é determinado pela expressão

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \text{ com } a > 0.$$

A velocidade média é igual à razão entre a distância e o tempo durante o qual esse movimento ocorreu:

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{v_0 t + \dfrac{at^2}{2}}{t} = v_0 + \frac{at}{2}.$$

Utilizando $a = (v - v_0)/t$, então

$$v_m = v_0 + \frac{v - v_0}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Quando o movimento é uniformemente retardado, $a < 0$, o mesmo resultado é obtido.

**Exemplo 4.** Com movimento uniformemente acelerado, um ponto passa nos dois primeiros intervalos de tempo consecutivos iguais $t = 4$ s ao longo dos segmentos de caminho $s_1 = 24$ m e $s_2 = 64$ m. Qual é a velocidade média do ponto na primeira e na segunda metade do caminho?

*Solução:* Primeiro precisamos determinar $v_0$ e $a$:

$$s_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad s_1 + s_2 = v_0(2t) + \frac{a(2t)^2}{2}.$$

Então, isolando $a$ em ambas as equações é igualando obtemos:

$$s_1 - v_0 t = \frac{s_1 + s_2 - 2v_0 t}{4} \quad \Rightarrow \quad 4s_1 - 4v_0 t = s_1 + s_2 - 2v_0 t,$$

então

$$3s_1 - s_2 = 2v_0 t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{3s_1 - s_2}{2t}$$

Considerando o valor de $v_0$ podemos achar o valor de $a$

$$s_1 = \frac{3s_1 - s_2}{2t} t + \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2s_1 = 3s_1 - s_2 + at^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{s_2 - s_1}{t^2}.$$

A seguir, encontre a velocidade $v_1$ no meio do caminho:

$$\frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{v_1^2 - \left(\frac{3s_1 - s_2}{2t}\right)^2}{2\left(\frac{s_2 - s_1}{t^2}\right)},$$

então obtemos

$$\frac{s_2^2 - s_1^2}{t^2} = \frac{4t^2 v_1^2 - (3s_1 - s_2)^2}{4t^2} \quad \Rightarrow \quad 4s_2^2 - 4s_1^2 = 4t^2 v_1^2 - 9s_1^2 + 6s_1 s_2 - s_2^2$$

$$3s_2^2 - 6s_1 s_2 + 5s_1^2 = 4t^2 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{2t}\sqrt{3s_2^2 - 6s_1 s_2 + 5s_1^2}$$

então a velocidade média do primeiro tramo é

$$v_{1,m} = \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{2v_0 t + \sqrt{3s_2^2 - 6s_1 s_2 + 5s_1^2}}{4t} = 14.9 \text{ m/s}.$$

Para determinar a velocidade média na segunda metade do trajeto, encontramos a velocidade $v_2$ no final do trajeto:

$$v_2^2 - v_0^2 = 2a(s_1 + s_2) \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = 2\frac{(s_2^2 - s_1^2)}{t^2} + \frac{3s_2^2 - 6s_1 s_2 + 5s_1^2}{4t^2}$$

$$4t^2 v_2^2 = 8(s_2^2 - s_1^2) + 3s_2^2 - 6s_1 s_2 + 5s_1^2 = 11s_1^2 - 6s_1 s_2 - 3s_1^2$$

finalmente

$$v_2 = \frac{1}{2t}\sqrt{11s_1^2 - 6s_1 s_2 - 3s_1^2}$$

então a velocidade média no segundo tramo é

$$v_{2,m} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\sqrt{11s_1^2 - 6s_1 s_2 - 3s_1^2} + \sqrt{3s_2^2 - 6s_1 s_2 + 5s_1^2}}{4t} \approx 17.9 \text{ m/s}.$$

**Exemplo 5.** Uma bola rola em um plano inclinado sem velocidade inicial. No último segundo, ele viajou duas vezes mais que no segundo anterior. O comprimento do plano inclinado é $l = 3.1$ m. Precisamos encontrar a velocidade média da bola ao longo de todo o caminho. Despreze o atrito.

*Solução:* Todo o caminho consiste em três seções. Vamos denotar a duração da primeira seção por $t_1$. As durações da segunda e terceira seções são conhecidas: $t_2 = t_3 = 1$ s. As velocidades no final das três seções são iguais, respectivamente, $v_1 = at_1$, $v_2 = a(t_2 + t_1)$, $v_3 = a(t_1 + t_2 + t_3)$. Vamos anotar as expressões para os caminhos da segunda e terceira seções

$$s_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} t_2 = \frac{at_1 + a(t_1 + t_2)}{2} t_2,$$

$$2s_2 = \frac{v_2 + v_3}{2} t_3 = \frac{a(t_1 + t_2) + a(t_1 + t_2 + t_3)}{2} t_3,$$

de onde podemos encontra o tempo $t_1$:

$$\frac{at_1 + a(t_1 + t_2)}{2} t_2 = \frac{a(t_1 + t_2) + a(t_1 + t_2 + t_3)}{4} t_3,$$

$$2t_1 t_2 + 2(t_1 + t_2)t_2 = (t_1 + t_2)t_3 + (t_1 + t_2 + t_3)t_3 \quad \Rightarrow \quad 4t_1 t_2 + 2t_2^2 = 2t_1 t_3 + 2t_2 t_3 + t_3^2$$

ou seja que

$$t_1 = \frac{t_3^2 + 2t_2 t_3 - 2t_2^2}{2(2t_2 - t_3)}.$$

Então a velocidade média ao longo de todo o caminho será igual a

$$v_m = \frac{l}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{l}{\frac{t_3^2 + 2t_2 t_3 - 2t_2^2}{2(2t_2 - t_3)} + t_2 + t_3} = \frac{2l(2t_2 - t_3)}{t_3^2 + 2t_2 t_3 - 2t_2^2 + 4t_2^2 - 2t_2 t_3 + 4t_2 t_3 - 2t_3^2}$$

ou seja

$$v_m = \frac{2l(2t_2 - t_3)}{2t_2^2 + 4t_2 t_3 - t_3^2} = 1.24 \text{ m/s}.$$

**Exemplo 6.** Um observador, que estava parado na borda frontal do trem elétrico quando o trem elétrico começou a se mover, percebeu que o primeiro vagão passou por ele no tempo $t_1 = 10$ s. O trem elétrico é composto por $n = 30$ vagões, o comprimento de cada um deles é $l = 25$ m. Qual foi a velocidade média do trem elétrico durante o tempo em que todo o trem passou pelo observador? O movimento é considerado uniformemente acelerado.

*Solução:* Vamos escrever as equações de movimento além do observador do primeiro e do segundo vagão:

$$l_1 = \frac{at_1^2}{2}, \quad l_2 = v_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2}.$$

Conhecemos que $l_1 = l_2 = l$ e $v_1 = at_1$, então

$$\frac{at_1^2}{2} = at_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 + 2\left(\frac{t_2}{t_1}\right) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_1\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right).$$

Para o terceiro vagão escrevemos, respectivamente,

$$l_3 = v_2 t_3 + \frac{a t_3^2}{2}, \text{ onde } v_2 = v_1 + a t_2 = a(t_1 + t_2),$$

por isso,

$$t_3^2 + 2(t_1 + t_2)t_3 - t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_3^2 + 2\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{1}\right) t_1 t_3 - t_1^2 = 0$$

ou seja que

$$\left(\frac{t_3}{t_1}\right)^2 + 2\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{1}\right)\left(\frac{t_3}{t_1}\right) - 1 = 0.$$

Utilizando a solução geral da equação de segundo grau obtemos

$$\frac{t_3}{t_1} = -\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{1}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{1}\right)^2 + 1} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$$

Note que a solução negativa não tem sentido físico pois $t_3/t_1 > 0$, então

$$t_3 = t_1\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right).$$

Se repetimos o procedimento para o quarto vagão obtemos que $t_4 = t_1\left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right)$. Neste ponto podemos supor que em geral $t_n = t_1\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$, mas isso tem que ser demostrado. Entre os diversos métodos que podem ser utilizados para mostrar a nossa hipóteses, vamos escolher o principio de *indução completa*. Certamente em $n = 2$ temos um inicio de indução $t_2 = t_1\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right)$. Agora vamos supor que a hipóteses é verdadeira para certo $n = k > 2$, ou seja que $t_k = t_1\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$. Então, para os vagões $k$ e $k+1$ temos que $l_k = l_{k+1}$, ou seja

$$v_{k-1} t_k + \frac{a t_k^2}{2} = v_k t_{k+1} + \frac{a t_{k+1}^2}{2},$$

note também que

$$v_k = v_{k-1} + a t_k, \text{ e } v_k^2 = v_{k-1}^2 + v_1^2 = v_{k-1}^2 + a^2 t_1^2$$

então utilizando as duas últimas equações

$$v_k^2 = (v_k - a t_k)^2 + a^2 t_1^2 = v_k^2 - 2 a v_k t_k + a^2 t_k^2 + a^2 t_1^2,$$

ou seja que

$$2 v_k t_k = a(t_k^2 + t_1^2) \quad \Rightarrow \quad v_k = \frac{a(t_k^2 + t_1^2)}{2 t_k}.$$

Finalmente obtemos que

$$\left[\frac{a(t_k^2 + t_1^2)}{2 t_k} - a t_k\right] t_k + \frac{a t_k^2}{2} = \frac{a(t_k^2 + t_1^2)}{2 t_k} t_{k+1} + \frac{a t_{k+1}^2}{2},$$

$$\left[(t_k^2 + t_1^2) - 2 t_k^2\right] + t_k^2 = \frac{(t_k^2 + t_1^2)}{t_k} t_{k+1} + t_{k+1}^2,$$

$$t_1^2 = \frac{(t_k^2 + t_1^2)}{t_k} t_{k+1} + t_{k+1}^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = \left(\frac{t_1}{t_k}\right)\left[\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2 + 1\right]\left(\frac{t_{k+1}}{t_1}\right) + \left(\frac{t_{k+1}}{t_1}\right)^2$$

então

$$\left(\frac{t_{k+1}}{t_1}\right)^2 + \left[\left(\frac{t_k}{t_1}\right) + \left(\frac{t_1}{t_k}\right)\right]\left(\frac{t_{k+1}}{t_1}\right) - 1 = 0$$

ou seja que temos

$$\frac{t_{k+1}}{t_1} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t_k}{t_1}\right) + \left(\frac{t_1}{t_k}\right)\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{t_k}{t_1}\right) + \left(\frac{t_1}{t_k}\right)\right]^2 + 1}$$

$$\frac{t_{k+1}}{t_1} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t_k}{t_1}\right) + \left(\frac{t_1}{t_k}\right)\right] \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2\right] + 6}$$

Note que

$$\left(\frac{t_k}{t_1}\right) + \left(\frac{t_1}{t_k}\right) = \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) + \frac{1}{\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)} = \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) +$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)}{\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)} = \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) + \left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right) =$$

$$2\sqrt{k}.$$

e que

$$\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2 = \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^2 + \frac{1}{\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^2} = \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^2 +$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^2} \cdot \frac{\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)^2}{\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)^2} = \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^2 + \left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)^2 =$$

$$2k + 2(k-1) = 4k - 2.$$

Podemos escrever então que

$$\frac{t_{k+1}}{t_1} = -\frac{1}{2}2\sqrt{k} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4k - 2 + 6} = -\sqrt{k} \pm \sqrt{k+1},$$

como $t_{k+1}/t_1 > 0$, o sinal negativo pode ser descartado, então $t_{k+1} = t_1\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$, ou seja, mostramos que a propriedade é valida para $n = k+1$, assumindo a validade para $n = k$. Ou seja com base no principio de indução completa e de algumas fórmulas cinemáticas mostramos que

$$t_n = t_1\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$

O comprimento do trem elétrico é $L = nl$. O tempo total durante o qual todos os vagões passaram pelo observador é igual a

$$t = \sum_{i=1}^{n} t_i = \sqrt{n} t_1,$$

noque que a suma anterior é *telescópica*. A velocidade média será então

$$v_m = \frac{L}{t} = \frac{nl}{\sqrt{n} t_1} = \frac{\sqrt{n} l}{t_1} = \frac{\sqrt{30} l}{t_1} \approx 13.7 \text{ m/s}.$$

**Exemplo 7.** Durante o primeiro terço do caminho um carro viajou à velocidade $v_1$, e no último terço do tempo à velocidade $v_3$. No segundo trecho do caminho, sua velocidade foi igual à velocidade média de movimento ao longo de todo o caminho. Precisamos encontrar essa velocidade média.

*Solução:* Temos que

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s - \frac{s}{3} - \frac{v_3 t}{3}}{t - \frac{s}{3v_1} - \frac{t}{3}} = v_m = \frac{s}{t}.$$

Portanto

$$v_m = \frac{\frac{2v_m}{3} - \frac{v_3}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{v_m}{3v_1}} = \frac{2v_m - v_3}{2 - \frac{v_m}{v_1}} \quad \Rightarrow \quad 2v_m - \frac{v_m^2}{v_1} = 2v_m - v_3 \quad \Rightarrow \quad v_m^2 = v_1 v_3,$$

finalmente obtemos que $v_m = \sqrt{v_1 v_3}$.

**Exemplo 8.** Um motociclista viajava da cidade $A$ para a cidade $B$ com velocidade constante de $v_1 = 80$ Km/h. Na volta, parte da rodovia estava lotada de veículos, e ele dirigiu a uma velocidade de $v_2 = 30$ Km/h durante o tempo que levou para viajar da cidade $A$ até a cidade $B$. Depois, o restante do trajeto, a rodovia fico livre, e ele correu a uma velocidade de $v_3 = 100$ Km/h. Determine a velocidade média do motociclista durante todo o percurso da cidade $A$ até a cidade $B$ e vice-versa.

*Solução:* Seja $L$ a distância da cidade $A$ à cidade $B$. Então o tempo gasto pelo motociclista na primeira metade do trajeto é igual a

$$t_1 = \frac{L}{v_1}.$$

A distância que o motociclista percorreu com velocidade $v_3 = 100$ Km/s é igual a

$$L_3 = L - v_2 t_1 = L - v_2 \frac{L}{v_1},$$

e para superá-lo ele gastou tempo $t_3 = L_3/v_3$ . A velocidade média é igual à razão entre o comprimento de todo o caminho e o tempo total de viagem:

$$v_m = \frac{2L}{2t_1 + t_3} = \frac{2L}{\dfrac{2L}{v_1} + \dfrac{L}{v_3}\left(1 - \dfrac{v_2}{v_1}\right)} = \frac{2}{\dfrac{2}{v_1} + \dfrac{1}{v_3}\left(1 - \dfrac{v_2}{v_1}\right)}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{2}{v_1} + \dfrac{1}{v_3 v_1}(v_1 - v_2)} = \frac{2v_1 v_3}{v_1 - v_2 + 2v_3} = 64 \text{ Km/h}.$$

**Exemplo 9.** Em dois trechos consecutivos da rota, o carro se moveu em velocidades constantes. Sabe-se que sua velocidade média na primeira metade da viagem é duas vezes maior que na segunda, e que o carro gastou um quarto do tempo total de viagem para passar o primeiro trecho da viagem. Quantas vezes sua velocidade média é maior na primeira metade do tempo de movimento do que na segunda?

*Solução:* Vamos desenhar gráficos do movimento do carro (ver Fig 1).

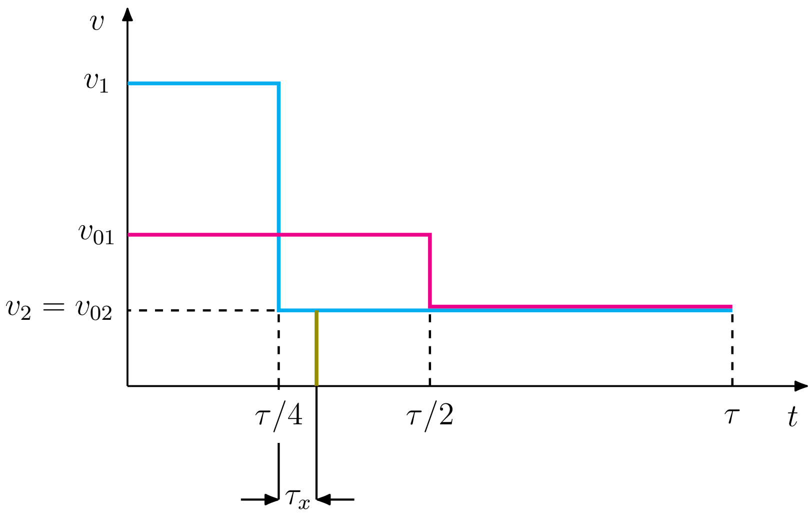


Figura 1:

O gráfico com linhas vermelhas representa o movimento quando o carro estava viajando com velocidade média $v_{01}$ na primeira metade do tempo e com velocidade média $v_{02}$ na segunda metade do tempo. O gráfico azul representa o movimento quando o carro percorreu o primeiro trecho do caminho com velocidade $v_1$ em um quarto de seu tempo de viagem, e o segundo trecho com velocidade $v_2 = v_{02}$. Da igualdade das áreas sob os gráficos, encontramos

$$\frac{v_1 \tau}{4} + \frac{v_2 \tau}{4} = \frac{v_{01}\tau}{2} \quad \Rightarrow \quad v_{01} = \frac{v_1 + v_2}{2}, \text{ onde } v_2 = v_{02}.$$

A partir da declaração do problema,

$$\frac{s}{2} = 2v_m \left(\frac{\tau}{4} + \tau_x\right) = v_m \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} - \tau_x\right),$$

de onde obtemos que $\tau_x = \tau/12$. A linha vertical verde divide a área sob o gráfico azul em duas partes iguais:

$$\frac{s}{2} = v_1\frac{\tau}{4} + v_2\tau_x = v_2\left(\frac{\tau}{4} - \tau_x + \frac{\tau}{2}\right).$$

A partir daqui obtemos

$$v_{01} = \frac{5}{3}v_2, \quad v_{02} = v_2, \quad \frac{v_{01}}{v_{02}} = \frac{5}{3}.$$

**Exemplo 10.** O bonde percorreu a distância entre paradas adjacentes em um determinado tempo e, a princípio, moveu-se uniformemente acelerado, depois uniformemente e, no final, desacelerou uniformemente. A aceleração e desaceleração levaram um total de $\Delta t = 2$ min, e a velocidade máxima foi $v_0 = 5$ m/s. A distância entre as paradas é $s = 1500$ m, precisamos encontrar a velocidade média do bonde.

*Solução:* Denotemos o tempo total de viagem do bonde por $t$ e o tempo de aceleração por $t_0$. Então o tempo de frenagem é igual a $\Delta t - t_0$ Vamos desenhar um gráfico da dependência da velocidade do bonde com o tempo (ver Fig. 2).

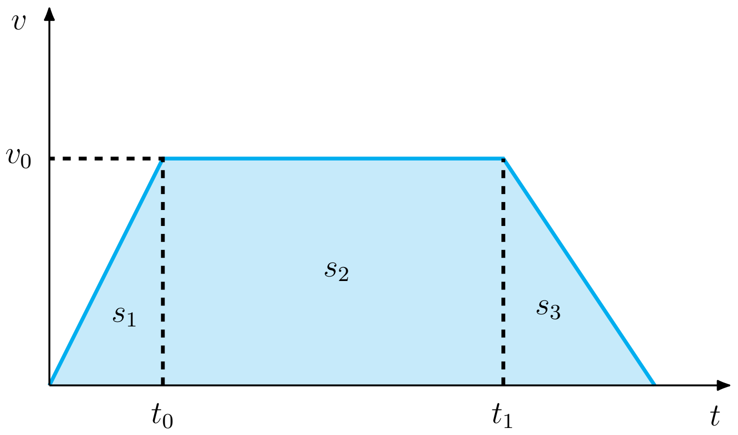


Figura 2:

Durante o tempo $t_0$ o bonde percorrerá a distância

$$s_1 = \frac{v_0 t_0}{2}.$$

Analisando o horário de trânsito, encontramos a distância percorrida pelo bonde quando ele se move uniformemente:

$$s_2 = v_0(t - \Delta t).$$

A trajetória do bonde no terceiro estágio do movimento é igual a

$$s_3 = \frac{v_0(t - t_1)}{2} = \frac{v_0(\Delta t - t_0)}{2}.$$

A distância entre as paradas é $s = s_1 + s_2 + s_3$, ou seja

$$s = \frac{v_0 t_0}{2} + v_0(t - \Delta t) + \frac{v_0(\Delta t - t_0)}{2} = \frac{v_0}{2}\left[t_0 + 2(t - \Delta t) + (\Delta t - t_0)\right],$$

ou seja

$$s = \frac{v_0}{2}(2t - \Delta t) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v_0} + \frac{\Delta t}{2}.$$

Finalmente, a velocidade média é

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s}{v_0} + \frac{\Delta t}{2}} = \frac{2v_0 s}{2s + v_0 \Delta t} \approx 4.2 \text{ m/s}.$$

**Exemplo 11.** O gráfico da dependência da velocidade de um corpo com o tempo tem a forma de um semicírculo (ver Fig 3). A velocidade máxima é $v_0$. Determine a velocidade média do corpo durante o tempo $t_1$.

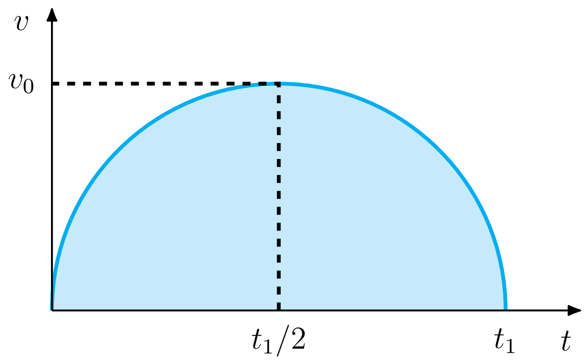


Figura 3:

*Solução:* A área do semicírculo é igual a $\pi R^2/2$ e corresponde (numericamente) ao caminho $l$ percorrido pelo corpo. È claro que debemos selecionar $R^2$ de modo que tenha unidades de distância, ou seja, $R^2 = v_0 t_1/2$, então o caminho recorrido pelo corpo até o tempo $t_1$ é

$$l = \frac{\pi v_0 t_1}{4}$$

Neste caso, a velocidade média do corpo é

$$v_m = \frac{l}{t_1} = \frac{\pi}{4} v_0.$$

**Exemplo 12.** Uma formiga sai do formigueiro em linha reta de modo que sua velocidade é inversamente proporcional à distância até o centro do formigueiro. No momento em que a formiga está no ponto $A$ a uma distância $l_1 = 1$ m do centro do formigueiro, sua velocidade média é $v_1 = 2$ cm/s. Encontre a velocidade média da formiga quando ela corre do ponto $A$ ao ponto $B$, que está localizado a uma distância de $l_2 = 2$ m do centro do formigueiro.

*Solução:* O caminho da formiga é $l_2 - l_1$. Precisamos encontrar o tempo que a formiga leva para correr do ponto $A$ ao ponto $B$. Vamos dividir todo o caminho da formiga em pequenas seções $\Delta l \ll l_1$, que ela percorre em intervalos de tempo iguais $\Delta t$. Então $\Delta t = \Delta l / v_m(\Delta l)$, onde $v_m(\Delta l)$ é a velocidade média em um determinado segmento $\Delta l$. Esta fórmula sugere

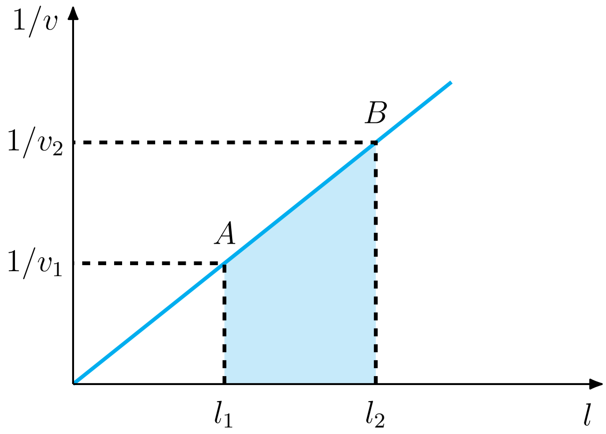


Figura 4:

uma ideia para resolver o problema. Vamos desenhar um gráfico da dependência do valor $1/v_m(\Delta l)$ em $l$ no caminho do ponto $A$ ao ponto $B$. Como $\Delta l$ tende a zero, obtemos um gráfico linear (ver Fig 4).

A área do trapézio sombreada na figura é numericamente igual ao tempo necessário. Não é difícil encontrar:

$$S_{\text{trapézio}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)(l_2 - l_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1}\frac{l_2}{l_1}\right)(l_2 - l_1) = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2v_1 l_1} = t.$$

Então, a velocidade média é

$$v_m = \frac{l_2 - l_1}{t} = \frac{2l_1 v_1}{l_1 + l_2} \approx 1.3 \text{ m/s}.$$