ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Esferas e Parábolas

São Paulo | 22 de Março de 2024.

Resumo

Estas notas foram traduzidas do russo e modificadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP). O artigo original corresponde a Б.МУКУШЕВ e А.ТУРДИН do jornal КВАНТ (N° 03-2019).

O movimento de um corpo em um campo gravitacional homogêneo ao superar qualquer obstáculo é um dos fenômenos mais atraentes da mecânica. Os obstáculos podem ser diferentes, por exemplo, uma cerca, uma casa, uma pirâmide ou uma habitação em forma de cone e semelhantes

Após a realização da EXPO 2017 em Astana (Cazaquistão), interessamo-nos por uma enorme estrutura esférica construída no centro da área expositiva e que representa o símbolo arquitetônico da exposição (ver Fig 1).

Este é o maior edifício esférico do mundo, com $R = 40$ m de raio. A grandeza do objeto esférico levou-nos ao estudo do mesmo do ponto de vista da ciência, em particular da cinemática. Analisemos algumas questões que surgem quando queremos superar o edifício esférico com o lançamento de um objeto que se move no campo de gravidade da Terra.

Aqui estão algumas tarefas específicas

Figura 1: Guardian Glass Project: Astana EXPO 2017, Cazaquistão.

Exemplo 1. Uma bola foi lançada do solo com velocidade inicial mínima para que voasse sobre a estrutura esférica da EXPO 2017, tocando apenas o topo do edifício (ver Fig 2). Encontre: o valor da velocidade e o ângulo de lançamento; equação de trajetória, coordenadas dos pontos de lançamento e aterrissagem, bem como o tempo de voo da bola.

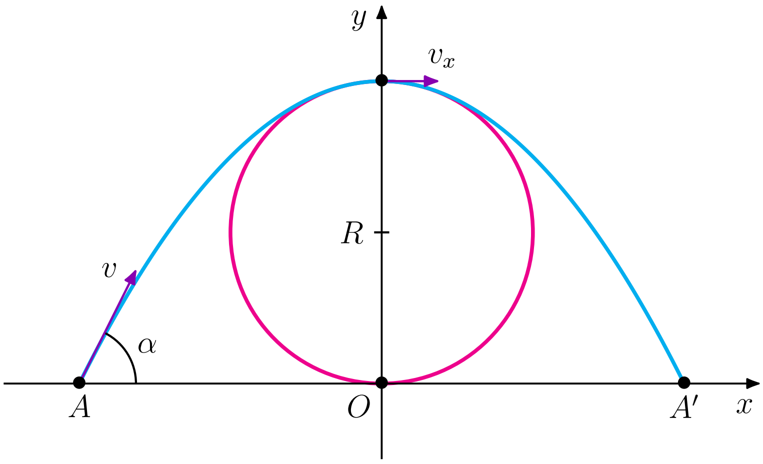

Figura 2

Solução: Considerando o ponto A e o topo da esfera temos que

$$v_x^2 = v^2 - 2g(2R) = v^2 - 4gR$$

No topo da esfera, a aceleração normal (centrípeta) é devida à gravidade, então

$$\frac{v_x^2}{R} = g \quad \Rightarrow \quad v_x^2 = gR.$$

Assim, a velocidade de lançamento da bola é

$$v^2 = v_x^2 + 4gR = gR + 4gR = 5gR \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{5gR},$$

e o ângulo de lançamento da bola é igual a

$$\cos(\alpha) = \frac{v_x}{v} = \frac{gR}{5gR} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos(1/5).$$

Considere o movimento da bola a partir do momento em que ela atinge o topo da esfera. O estágio posterior do movimento da bola equivale ao fato de ela ter sido lançada horizontalmente com velocidade v_x de uma altura de $2R$. A equação da trajetória para tal movimento tem a forma

$$x = v_x t = \sqrt{gR}t, \quad y = 2R - \frac{gt^2}{2},$$

então

$$y = 2R - \frac{g}{2}\frac{x^2}{gR} \quad \Rightarrow \quad y = 2R - \frac{x^2}{2R}.$$

Portanto, os pontos de lançamento e queda possuem coordenadas $A(-2R, 0)$ e $A'(2R, 0)$, e o tempo de voo da bola é

$$t = \frac{AA'}{v_x} = \frac{4R}{\sqrt{gR}} = 4\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Exemplo 2. Para realizar o voo de uma bola pela estrutura esférica da EXPO 2017, ela foi lançada do chão com velocidade mínima. Durante seu voo, a bola tocou dois pontos da esfera. Encontre: a velocidade da bola nos pontos de contato com o edifício esférico e as coordenadas desses pontos; coordenadas do ponto máximo da trajetória da bola e sua velocidade neste ponto; o valor da velocidade de lançamento mínima da bola, na qual ela voará sobre a estrutura esférica sem ricochetear, bem como o ângulo de lançamento; a equação da trajetória da bola e as coordenadas dos pontos de lançamento e aterrissagem, bem como o tempo de voo da bola

Solução: Ao voar sobre o edifício esférico, a bola pode, na verdade, ter dois pontos de contato com a esfera (ver Fig 3). Os raios traçados nos pontos de tangência A' e A formam

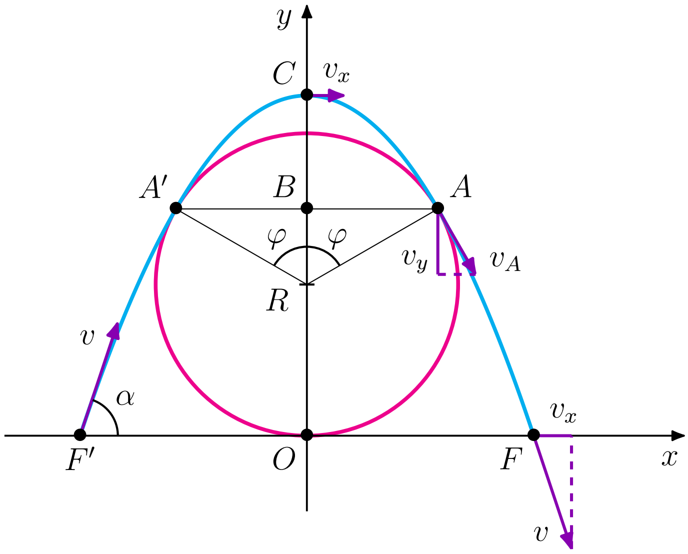

Figura 3

um ângulo φ com a vertical. Por questões de simetria e reversibilidade da trajetória, basta considerar o movimento da bola apenas no trecho CAF. Seja a velocidade no ponto de contato v_A, e o tempo de movimento do topo até este ponto τ. Em que

$$v_x = v_A \cos(\varphi), \;\; v_y = v_A \sin(\varphi) = g\tau,$$

$$AB = R\sin(\varphi) = v_x\tau = v_A\tau\cos(\varphi).$$

Das duas últimas igualdades encontramos

$$v_A^2 = \frac{gR}{\cos(\varphi)}.$$

Conhecemos de cinemática que entre os pontos A e F temos

$$v_A^2 = v^2 - 2g\left[R + R\cos(\varphi)\right] = v^2 - 2gR\left[1 + \cos(\varphi)\right]$$

então podemos escrever que

$$v^2 = 2gR\left[\frac{1}{2\cos(\varphi)} + \cos(\varphi) + 1\right].$$

O valor extremo da última expressão entre parênteses determinará a velocidade mínima necessária. Com base na desigualdade Bunyakovsky-Cauchy,

$$\frac{1}{2\cos(\varphi)} + \cos(\varphi) \geqslant 2\sqrt{\frac{\cos(\varphi)}{2\cos(\varphi)}} = \sqrt{2},$$

onde a igualdade determina o valor mínimo:

$$\left[\frac{1}{2\cos(\varphi)} + \cos(\varphi)\right]_{\min} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, a velocidade da bola nos pontos de contato com o edifício é igual a

$$v_A = \sqrt{\frac{gR}{\cos(\varphi)}} = \sqrt{\sqrt{2}gR}.$$

Como $AB = R\sin(\varphi) = \sqrt{2}R/2$ e $OB = R\left[1+\cos(\varphi)\right] = (2+\sqrt{2})R/2$, então os pontos tangentes têm as seguintes coordenadas:

$$A'(R\sin(\varphi), R + R\cos(\varphi)) = A'\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}, R + \frac{\sqrt{2}R}{2}\right),$$

$$A(-R\sin(\varphi), R + R\cos(\varphi) = A\left(-\frac{\sqrt{2}R}{2}, R + \frac{\sqrt{2}R}{2}\right).$$

Agora vamos dar uma olhada no ponto máximo da trajetória da bola. Porque

$$CO = CB + BO = \frac{v_y^2}{2g} + R\left[1+\cos(\varphi)\right] = \frac{v_A^2\sin^2(\varphi)}{2g} + R\left[1+\cos(\varphi)\right],$$

ou seja que

$$CO = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 1\right)R$$

então o ponto máximo C da trajetória da bola tem coordenadas (x, y). A velocidade neste momento é

$$v_x = v_A\cos(\varphi) = \sqrt{gR\cos(\varphi)} = \sqrt{\frac{gR}{\sqrt{2}}}$$

Além disso, sabe-se que

$$v^2 = 2gR\left[\frac{1}{2\cos(\varphi)} + \cos(\varphi) + 1\right] = 2gR(\sqrt{2}+1),$$

ou seja

$$\cos(\alpha) = \frac{v_x}{v} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

finalmente

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

Resta escrever a equação da trajetória da bola:

$$y = OC - \frac{gx^2}{2v_x^2} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 1\right)R - \frac{gx^2}{2}\frac{\sqrt{2}}{gR} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 1\right)R - \frac{x^2}{\sqrt{2}R}$$

os zeros de esta parábola são os valores de x onde $y = 0$, então

$$\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 1\right)R - \frac{x^2}{\sqrt{2}R} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3+2\sqrt{2})R^2 = 2x^2$$

de onde obtemos que $x_\pm = \pm\sqrt{(3+2\sqrt{2})/2}$, então o tempo de voo será

$$t = \frac{F'F}{v_x} = \frac{x_+ - x_-}{v_x} = \frac{R\sqrt{3\sqrt{2}+4}}{\sqrt{\frac{gR}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{2\left(3+2\sqrt{2}\right)\frac{R}{g}}.$$

Exemplo 3. É necessário atingir o ponto mais alto da construção esférica, mostrada na Fig 4, lançando uma bola com a menor velocidade possível. Até que o alvo seja atingido, a bola não pode quicar no prédio. O raio da estrutura esférica é $R = 40$ m. Despreze a resistência do ar. Precisamos encontrar os seguintes parâmetros: a velocidade da bola v_0 no momento em que atinge o alvo e a menor velocidade v com que a bola foi lançada do solo; coordenadas do ponto de contato da trajetória da bola com a esfera e a distância entre o ponto de contato e o ponto mais alto; ângulo de incidência da bola α no ponto mais alto da esfera; coordenadas do ponto de lançamento da bola e ângulo de lançamento; tempo de voo da bola, equação da trajetória da bola e coordenadas do ponto máximo da trajetória

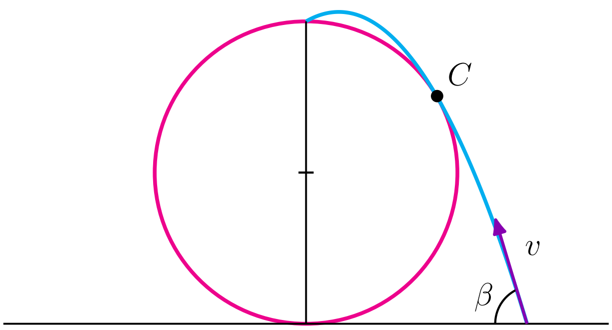

Figura 4

Solução: A trajetória ótima da bola toca a superfície da esfera em algum ponto lateral C do edifício, conforme mostrado na Fig 4. Por razões de reversibilidade da trajetória, considere a situação em que a bola é lançada do ponto superior do edifício com velocidade mínima v_0 para que não toque no prédio (voando infinitamente próximo dele) ao cair no chão (ver Fig 5).

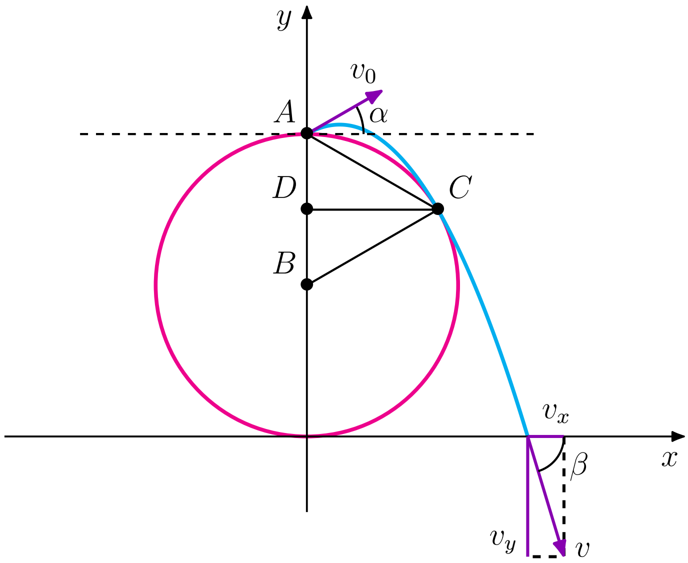

Figura 5

Precisamos encontrar o ponto de contato entre o círculo e a trajetória ideal da bola. Vamos escrever as equações de um círculo

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

e a trajetória da bola

$$y = x \tan(\alpha) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} + 2R,$$

que utilizando a identidade trigonométrica $1/\cos^2(\alpha) = 1 + \tan^2(\alpha)$ podemos transformar em

$$y = x \tan(\alpha) - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left[1 + \tan^2(\alpha)\right] + 2R.$$

Então temos a equação de um círculo e uma família de trajetórias parabólicas (note que a equação da parábola depende de dois parâmetros v_0 e α). A equação anterior também pode ser resolvida respeito do ângulo α que será necessário para bater em um determinado ponto de coordenadas $(x; y)$ se a velocidade inicial é v_0, então obtemos

$$\frac{gx^2}{2v_0^2}\tan^2(\alpha) - x\tan(\alpha) - \left(2R - \frac{gx^2}{2v_0^2} - y\right) = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau respeito de $\tan(\alpha)$ obtemos

$$\tan(\alpha) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + \frac{gx^2}{v_0^2}\left(4R - \frac{gx^2}{v_0^2} - 2y\right)}}{\frac{gx^2}{v_0^2}}.$$

No caso que o discriminante seja positivo teremos duas soluções, ou seja, existem dois ângulos possíveis para bater no alvo com coordenada $(x; y)$ se a velocidade inicial for v_0. No caso de discriminante negativo não vamos conseguir bater no alvo. No caso de discriminante nulo, ou seja:

$$x^2 + \frac{gx^2}{v_0^2}\left(4R - \frac{gx^2}{v_0^2} - 3y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{g}{v_0^2}\left(4R - \frac{gx^2}{v_0^2} - 2y\right) = 0,$$

$$2R - \frac{gx^2}{2v_0^2} - y = -\frac{v_0^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R,$$

temos apenas uma solução, correspondente ao ângulo $\tan(\alpha) = v_0^2/gx$. È claro que este caso corresponde à menor velocidade inicial necessária. Então o temos as duas equações:

$$x^2 + (y - 2R)^2 = R^2,$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R,$$

que no ponto de contato do edifício com a trajetória parabólica tem que ser satisfeitas. Omitindo y destas equações obtemos

$$\left(\frac{g}{2v_0^2}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right) x^2 + \left(\frac{v_0^2}{4g} + R\right)\frac{v_0^2}{g} = 0.$$

Sua solução é uma equação com duas incógnitas x e v_0

$$x^2 = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right) \pm \sqrt{D}}{\frac{g^2}{2v_0^4}}$$

Se o discriminante D for zero, então existe apenas uma trajetória que garante que a bola passe pelo ponto C.

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2}\right) = 0.$$

Neste ponto podemos achar o valor o valor de v_0, ou seja

$$\frac{1}{4} - \frac{gR}{v_0^2} + \frac{g^2R^2}{v_0^4} - \frac{1}{4} - \frac{gR}{v_0^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

Então temos também que

$$v = \sqrt{v_0^2 + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

As coordenadas do ponto C serão:

$$x_C^2 = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)}{\frac{g^2}{2v_0^4}} = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{gR/2}\right)}{\frac{g^2}{2g^2R^2/4}} = \frac{3}{4}R^2 \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

$$y_C = \frac{1}{2g}\frac{gR}{2} - \frac{g}{2}\frac{2}{gR}\frac{3}{4}R^2 + 2R = \frac{R}{4} - \frac{3R}{4} + 2R = \frac{3}{2}R.$$

O ângulo será

$$\tan(\alpha) = \frac{v_0^2}{gx_C} = \frac{gR}{2g}\frac{2}{\sqrt{3}R} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Exemplo 4. Um disco de plástico foi lançado do solo com velocidade mínima em direção à esfera, de modo que passasse pelo ponto superior da estrutura esférica. Parte da trajetória do disco sem rebote fica na superfície da esfera. Desprezando a resistência do ar e assumindo que a superfície da esfera é lisa, encontre: as coordenadas do disco no momento de uma transição suave do estado de movimento parabólico livre para o estado de movimento circular ao longo da superfície da esfera, sua velocidade neste ponto e seu ângulo em relação ao horizonte; o valor da velocidade mínima do disco reportado ao nível do solo, o ângulo de lançamento do disco e as coordenadas do ponto de lançamento; equações de trajetórias parabólicas do disco

Solução: Por razões de reversibilidade da trajetória, assumiremos que o disco é liberado do ponto superior da esfera sem velocidade inicial. No ponto de separação C (ver Fig 6), a aceleração centrípeta (normal) do disco $a_n = v^2/R$ é um componente da aceleração da gravidade:

$$\frac{v^2}{R} = g\cos(\beta) = g\frac{R-h}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = (R-h)g.$$

Temos também que, analisando a projeção do movimento no eixo y, do ponto superior até o ponto C

$$v^2 = 2gh.$$

Igualando as duas expressões para v^2 obtemos

$$(R-h)g = 2gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{3}R.$$

Então podemos achar as coordenadas do ponto C, ou seja

$$x_C = x_B = OB = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}R.$$

$$y_C = 2R - h = \frac{5}{3}R.$$

A velocidade no ponto C é

$$v^2 = \frac{2gR}{3} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Também podemos determinar o ângulo β que forma o raio até o corpo no ponto C respeito da vertical, ou seja,

$$\cos(\beta) = \frac{R-h}{R} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right).$$

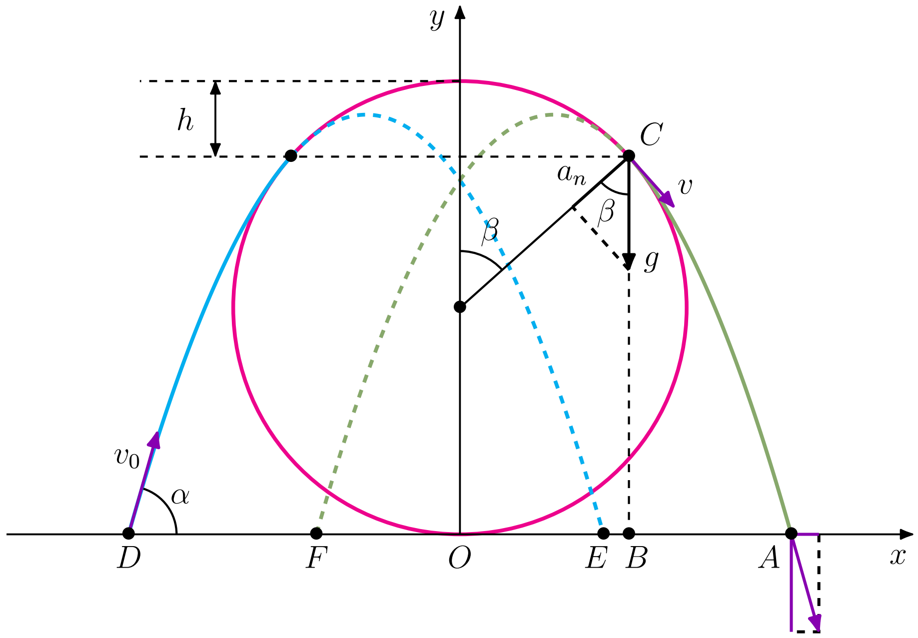

Figura 6

Utilizemos novamente as equações cinemáticas para o movimento parabólico, projetadas no eixo y, entre os pontos C e A (o chão), então temos que

$$v_0^2 = v^2 + 2g(2R - h) = v^2 + \frac{10gR}{3} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{2gR}{3} + \frac{10gR}{3} = 4gR,$$

ou seja que $v_0 = 2\sqrt{gR}$. Conhecemos que a componente da velocidade no eixo x permanece invariante, então comparando o ponto C com o ponto A obtemos $v\cos(\beta) = v_0 \cos(\alpha)$, então podemos determinar o ângulo α, ou seja

$$\cos(\alpha) = \frac{v\cos(\beta)}{v_0} = \sqrt{\frac{2}{27}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{27}}\right).$$

As coordenadas do ponto de lançamento são $y_A = y_D = 0$ e

$$x_A = -x_D = OA = OB + BA, \quad BA = vt\cos(\beta),$$

onde temos também que $v_0 \sin(\alpha) - v\sin(\beta) = gt$, então como

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \quad \sin(\beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\beta)} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

obtemos

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha) - v\sin(\beta)}{g} = \frac{\left(10 - \sqrt{10}\sqrt{Rg}\right)}{3\sqrt{3}g},$$

$$BA = \frac{2\sqrt{2}R}{27}\left(10 - \sqrt{10}\right) \quad \Rightarrow \quad x_A = \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{27}\left(10 - \sqrt{10}\right)\right] R.$$