Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Menor Tempo no Caminho

São Paulo | 11 de Abril de 2024.

Resumo

Estas notas foram criadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP).

Um motorista deve partir de um ponto A, localizado numa estrada (ver Fig 1), e atingir o ponto B localizado no campo a uma distância l da estrada, num intervalo de tempo mínimo. Sabe-se que a velocidade do carro, ao longo da estrada, é η vezes maior que a velocidade dele através do campo. Determine a que distância do ponto D ele deve desviar-se da estrada, a fim de atingir o ponto B no mínimo intervalo de tempo?

Solução 1: Seja que v_1 e v_2 são as velocidades do carro na estrada e no campo, respetivamente. Pelo enunciado do problema sabemos que $v_1 = \eta v_2$, e que $\overline{DB} = l$. Vamos supor que o motorista desvia-se da estrada no ponto C, na distância $\overline{CD} = x$ do ponto D, então o tempo total do recorrido foi como função de x tem a forma

$$t(x) = \frac{\overline{AC}}{v_1} + \frac{\overline{CB}}{v_2},$$

onde utilizando que $\overline{AC} = \overline{AD} - x$ e $\overline{CB}^2 = x^2 + l^2$, então

$$t(x) = \frac{\overline{AD} - x}{\eta v_2} + \frac{\sqrt{x^2 + l^2}}{v_2}.$$

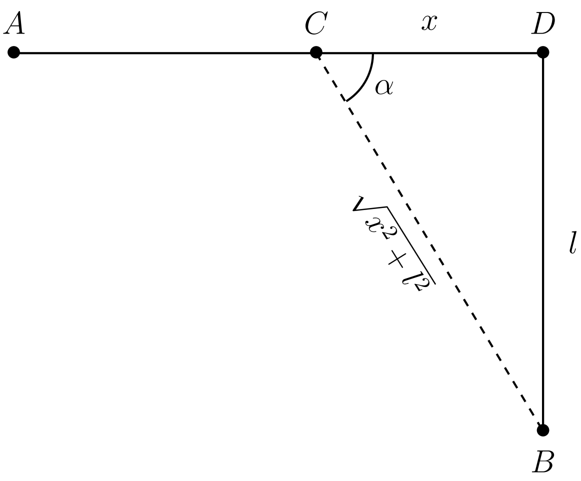

Figura 1:

A solução mais simples do problema pode ser determinada utilizando derivadas. Sabemos que o valor de x onde o tempo é mínimo satisfaz a condição $dt(x)/\,dx = 0$, ou seja que

$$-\frac{1}{\eta v_2} + \frac{x}{v_2\sqrt{l^2+x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\eta} + \frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}} = 0,$$

então $-\left(l^2+x^2\right)+\eta^2 x^2 = 0$ de onde $x = l/\sqrt{\eta^2-1}$. Finalmente obtemos uma resposta. Mas ... o que acontece com aqueles estudantes do programa que não conhecem as regras de derivação? Será que existe uma outra via de solução?

Solução 2: Tentemos resolver o problema utilizando trigonometria, e para utilizar trigonometria no lugar da variável x vamos considerar o ângulo α. E claro que a expressão geral para o tempo pode ser escrida da seguinte forma:

$$t = \frac{\overline{AD} - \dfrac{l}{\tan(\alpha)}}{\eta v_2} + \frac{l}{v_2 \sin(\alpha)}.$$

Agora vamos utilizar as conhecidas identidades trigonométricas da $\tan(\alpha/2)$ (a demonstração ficara como exercício para o leitor),

$$\sin(\alpha) = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}, \text{ e } \tan(\alpha) = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1-\tan^2,(\alpha/2)}$$

Então a expressão para o tempo será

$$t = \frac{\overline{AD} - \dfrac{l}{2\tan(\alpha/2)}\left[1-\tan^2(\alpha/2)\right]}{\eta v_2} + \frac{l}{2v_2\tan(\alpha/2)}\left[1+\tan^2(\alpha/2)\right],$$

de onde

$$\eta v_2 t = \overline{AD} - \frac{l}{2\tan(\alpha/2)}\left[1-\tan^2(\alpha/2)\right] + \frac{\eta l}{2\tan(\alpha/2)}\left[1+\tan^2(\alpha/2)\right],$$

$$2\left(\frac{\eta v_2 t - \overline{AD}}{l}\right)\tan(\alpha/2) = -\left[1-\tan^2(\alpha/2)\right] + \eta\left[1+\tan^2(\alpha/2)\right].$$

$$(\eta+1)\tan^2(\alpha/2) - 2\left(\frac{\eta v_2 t - \overline{AD}}{l}\right)\tan(\alpha/2) + (\eta-1) = 0.$$

Temos uma equação de segundo grau que pode ser resolvida respeito da $\tan(\alpha/2)$, ou seja

$$\tan(\alpha/2) = \frac{1}{\eta+1}\left[\left(\frac{\eta v_2 t - \overline{AD}}{l}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\eta v_2 t - \overline{AD}}{l}\right)^2 - (\eta^2-1)}\right].$$

No caso que o discriminante for negativo, o nosso problemas no tem solução real, ou seja, não tem sentido físico. No caso quando o discriminante for não negativo temos

$$\left(\frac{\eta v_2 t - \overline{AD}}{l}\right)^2 - \left(\eta^2-1\right) \geqslant 0,$$

mas como $\eta > 1$, é valido tomar raiz quadrada na equação

$$\frac{\eta v_2 t - \overline{AD}}{l} \geqslant \sqrt{\eta^2 - 1}$$

ou seja,

$$t \geqslant \frac{\overline{AD}}{\eta v_2} + \frac{l}{\eta v_2}\sqrt{\eta^2 - 1}.$$

o que indica que o menor tempo é logrado quando se cumpre a igualdade. Esta igualdade coincide com um discriminante nulo, e um ângulo

$$\tan(\alpha/2) = \frac{\sqrt{\eta^2 - 1}}{\eta + 1} = \sqrt{\frac{\eta - 1}{\eta + 1}}.$$

Então temos que

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)} = \sqrt{\eta^2 - 1},$$

Mas como $\tan(\alpha/2) = l/x$ ou seja que $x = l/\sqrt{\eta^2 - 1}$. Encontramos o mesmo resultado sem necessidade de utilizar derivadas.