


Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Fontes de Corrente Direta

São Paulo | 25 de fevereiro de 2024.

Resumo

Estas notas foram traduzidas do russo e modificadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP).

 estudo da corrente direta (DC) começa com uma seção homogênea do circuito, na qual o movimento das cargas (portadores de corrente) é suportado por um campo eletrostático. No caso mais simples, uma seção homogênea contém um resistor ideal, cuja corrente é proporcional à diferença de potencial aplicada a ele:

$$U = IR \quad (1)$$

(Lei de Ohm, que você conhece bem para uma seção de circuito). Em outras palavras, a característica corrente-tensão de tal elemento é uma linha reta (ver Fig 8).

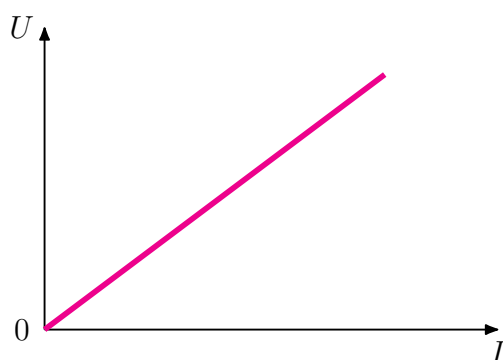


Figura 1:

Na verdade, a dependência da corrente na diferença de potencial para quase qualquer resistor não é linear, pois à medida que a corrente aumenta, o resistor aquece, e a resistência do resistor geralmente depende visivelmente da temperatura. Por exemplo, a resistência de um condutor metálico quando aquecido a 100 K aumenta em cerca de um terço, e a resistência

de alguns semicondutores, pelo contrário, diminui quando aquecido. Para simplificar o problema, costuma-se afirmar (ou implicitamente) que a resistência do condutor permanece constante; É claro que tal aproximação não é, para dizer o mínimo, totalmente correta. Não é por acaso que elementos de circuito com características corrente-tensão não lineares aparecem em questões e problemas de olimpíadas e exames de admissão às universidades.

A energia absorvida por uma seção homogênea do circuito é igual ao trabalho das forças eletrostáticas sobre uma carga que passa por qualquer seção transversal:

$$W = qU.$$

Assim, para o poder de absorção de energia por uma seção homogênea do circuito, qualquer uma das três expressões pode ser usada:

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \quad (2)$$

Estas expressões permanecem válidas mesmo com uma dependência não linear $U(I)$ - neste caso, a resistência R deve ser considerada dependente da intensidade da corrente.

Como o trabalho realizado pelas forças eletrostáticas em um circuito fechado é zero, elas não podem fornecer energia ao circuito e compensar a energia perdida devido ao aquecimento dos condutores. Portanto, forças externas de natureza não eletrostática devem atuar no circuito, cujo trabalho total é positivo. A presença de forças estranhas em uma seção não uniforme do circuito na qual essas forças estranhas atuam é representada como uma fonte com fem \mathcal{E} (ver Fig. 2-a))

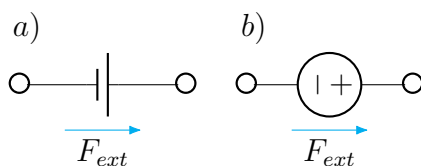


Figura 2:

Neste caso, as forças externas que atuam sobre a carga positiva dentro da fonte são direcionadas do pólo negativo para o positivo. (Na literatura estrangeira, uma designação diferente é usada - Fig 2-b).) O trabalho e a potência das forças externas em uma área não uniforme são expressos pelas fórmulas

$$A_{\mathcal{E}} = \pm q\mathcal{E}, \quad P_{\mathcal{E}} = \pm \mathcal{E}I, \quad (3)$$

onde o sinal “+” corresponde à passagem da fonte na direção das forças externas. Forças estranhas podem ser concentradas em seções individuais do circuito ou distribuídas por todo o circuito (por exemplo, um circuito fechado em um campo magnético alternado).

Pergunta: Pode haver um circuito fechado com corrente no qual não existam forças externas?

Resposta: Talvez. Por exemplo, um circuito supercondutor onde a corrente flui sem perda de energia

Em um circuito simples fechado não ramificado, a lei de Ohm se aplica ao circuito completo:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (4)$$

onde r é a resistência interna da fonte, \mathcal{E} é sua força eletromotriz, R é a resistência do circuito externo (não contendo fontes). Se houver várias fontes, o numerador contém a soma algébrica de todas as fem (com um sinal de mais inclui as fem das fontes onde as forças externas coincidem na direção do desvio do circuito) e o denominador é a soma de todas as resistências. (Se a corrente for negativa, isso significará que ela flui contra a direção de desvio selecionada.)

Um curto-circuito na fonte corresponde ao caso $R = 0$, a corrente de curto-circuito é igual a

$$I_{cc} = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

A tensão nos terminais da fonte, ou a diferença de potencial entre os pólos positivo e negativo, no circuito mais simples pode ser encontrada usando a lei de Ohm para um circuito externo homogêneo:

$$U_a = \varphi_+ - \varphi_- = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R + r}. \quad (5)$$

A partir desta fórmula fica claro que tanto no caso de um circuito aberto ($R \rightarrow \infty$, $I = 0$) quanto no caso de uma fonte ideal ($r = 0$), a tensão nos terminais da fonte é igual à fem: $\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E}$. (Em ambos os casos, as forças eletrostáticas e externas em cada ponto do circuito compensam-se mutuamente, o que significa que o seu trabalho na transferência da carga de teste é o mesmo.)

A partir das fórmulas (4), (5) podemos obter uma expressão para a tensão nos terminais, que não inclui a resistência do circuito externo:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E} - Ir. \quad (6)$$

Esta fórmula é chamada de lei de Ohm para uma seção não homogênea do circuito (a seção que contém a fonte de corrente). Sempre funciona, independentemente do que esteja contido no circuito externo - um simples resistor ou outras fontes. Uma técnica conveniente é imaginar uma seção não uniforme do circuito na forma de uma fonte ideal ($r = 0$), conectada em série com a resistência r (ver Fig 3). A diferença de potencial através de uma fonte ideal

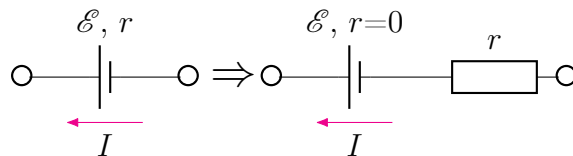


Figura 3:

é igual a \mathcal{E} independentemente da direção da corrente, e a diferença de potencial através da resistência é $-Ir$ se a corrente flui na direção de forças externas, e $+Ir$ se contra (sob a influência de forças externas). fontes no circuito externo). No segundo caso, a fórmula (6) assume a forma

$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E} + Ir. \quad (7)$$

A potência térmica da corrente em uma seção não uniforme do circuito é expressa por apenas uma fórmula $P_T = I^2 r$ (lei de Joule-Lenz). Se a fonte serve para produzir (gerar) energia e transmiti-la para um circuito externo, então a potência das forças externas atua como a potência gasta (total): $P_{tot} = \mathcal{E}I$. A potência útil (transferida para o circuito externo) é igual à potência total menos a perda (térmica):

$$P_{util} = \mathcal{E}I - I_2 R = (\varphi_+ - \varphi_-) I \quad (8)$$

(usamos a fórmula (6)). Assim como a fórmula (6), esta fórmula é geral, independente do que esteja no circuito externo. Se for conhecido que o circuito externo contém apenas resistência externa R , então as fórmulas (2) e (4) também podem ser usadas.

Se considerarmos uma seção do circuito que consome energia para realizar trabalho (motor), então, conforme segue em (8), a potência total fornecida a esta seção é expressa pela fórmula $P_{tot} = UI$, e a potência útil é igual para

$$P_{util} = UI - I^2 R. \quad (9)$$

Esta potência, conforme segue da fórmula (7), é igual a $\mathcal{E}I$, e o fem que surge no motor “trabalha” contra a corrente (o trabalho das forças externas no motor é negativo, o trabalho do motor em corpos externos é positivo).

Passemos agora à resolução de problemas específicos.

Exemplo 1. Quando o elemento está em curto com a resistência $R_1 = 1.8 \Omega$, uma corrente de $I_1 = 0.7 \text{ A}$ flui no circuito, e quando está em curto com a resistência $R_2 = 2.3 \Omega$, a corrente no circuito é $I_2 = 0.56 \text{ A}$. Encontre a corrente do curto-circuito.

Solução: Vamos escrever a lei de Ohm para o circuito completo para cada caso:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}$$

e expressar a partir deste sistema de equações a fem e a resistência interna da fonte. *Dica técnica:* é conveniente expressar a fem de cada equação e igualá-los - obtemos a equação para r

$$I_1 (R_1 + r) = I_2 (R_2 + r).$$

Ou você pode expressar r de cada equação e igualar, onde obtemos a equação para a fem

$$\frac{\mathcal{E}}{I_1} - R_1 = \frac{\mathcal{E}}{I_2} - R_2.$$

Como resultado encontramos

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} = 0.2 \Omega, \quad \mathcal{E} = \frac{R_2 - R_1}{1/I_2 - 1/I_1} = 1.4 \text{ V}.$$

A corrente de curto-circuito será igual a

$$I_{cc} = \frac{\mathcal{E}}{r} = 7 \text{ A}.$$

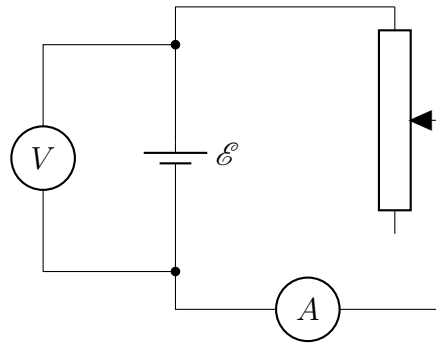


Figura 4:

Exemplo 2. Com uma resistência do reostato, o voltímetro mostra $U_1 = 6$ V, o amperímetro mostra $I_1 = 1$ A (ver Fig.). Com uma resistência diferente do reostato, as leituras dos instrumentos são $U_2 = 4$ V e $I_2 = 2$ A. Qual é a resistência interna da fonte de corrente? O amperímetro e o voltímetro são considerados ideais

Solução: Como existe uma resistência variável no circuito externo, é possível, calculando $R_1 = U_1/I_1$ e $R_2 = U_2/I_2$, reduzir o problema ao anterior. Contudo, é mais conveniente utilizar a fórmula (6) para evitar a introdução de novas variáveis. Isto é ainda mais importante no caso em que a definição do problema não indica em que consiste o circuito externo (na corrente I_1 , a tensão nos terminais da fonte é U_1, \dots). Nós temos

$$U_1 = \mathcal{E} - I_1 r, \quad U_2 = \mathcal{E} - I_2 r,$$

então

$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = 2 \Omega.$$

Exemplo 3. Três baterias idênticas com resistência interna de $r_0 = 6 \Omega$ foram curto-circuitadas, uma vez conectadas em paralelo e a outra em série, a alguma resistência. Neste caso, a intensidade da corrente no circuito externo foi a mesma em ambos os casos. Qual é a resistência externa?

Solução: Fontes conectadas em série ou paralelo, semelhantes a capacitores ou resistores, podem ser substituídas por uma fonte equivalente. A diferença é que é necessário calcular não uma, mas duas características da fonte equivalente - fem e resistência interna. No caso de uma conexão em série (Fig. 5), as correntes através das fontes são as mesmas e as diferenças de potencial somam-se. Tendo escrito a fórmula (6) para cada fonte e somando, chegamos às fórmulas esperadas

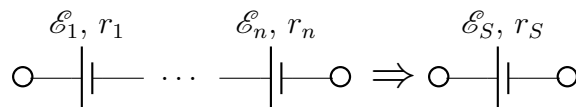


Figura 5:

$$\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots, \quad r_S = r_1 + r_2 + \dots$$

No caso de uma conexão paralela (Fig. 6), as diferenças de potencial são as mesmas e as correntes se somam. Tendo expressado as correntes das equações (6) e somadas, chegamos às seguintes fórmulas:

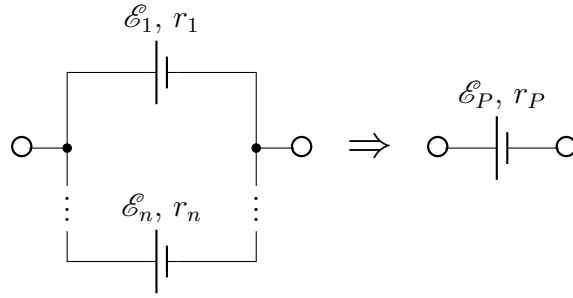


Figura 6:

$$\mathcal{E}_P = \frac{\mathcal{E}_1/r_1 + \mathcal{E}_2/r_2 + \dots}{1/r_1 + 1/r_2 + \dots}, \quad \frac{1}{r_P} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots \quad (10)$$

A segunda fórmula parece esperada, mas a primeira é muito complicada, mas é dramaticamente simplificada no caso de fem idênticos. Se $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \dots = \mathcal{E}_n$, então obtemos imediatamente $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_0$. O significado deste resultado é claro - a carga que passa pela fonte equivalente é dividida entre as fontes, mas cada parte ainda passará pela fonte com fem \mathcal{E}_0 .

No nosso problema obtemos

$$\mathcal{E}_S = n\mathcal{E}_0, \quad r_S = nr_0, \quad \mathcal{E}_P = \mathcal{E}_0, \quad r_P = \frac{r_0}{n},$$

onde $n = 3$. Igualando as correntes, chegamos à equação

$$\frac{n\mathcal{E}_0}{nr_0 + R} = \frac{\mathcal{E}_0}{\frac{r_0}{n} + R}$$

de onde descobrimos que para qualquer n

$$R = r_0 = 6 \Omega.$$

Exemplo 4. Duas fontes de corrente, a primeira com fem $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}$ e resistência interna $r_1 = 1 \Omega$, a segunda com fem $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ V}$ e resistência interna $r_2 = 0.5 \Omega$, são conectadas por pólos semelhantes, formando um circuito fechado (Fig. 7). Qual é a diferença de potencial entre os pólos positivo e negativo de cada fonte?

Solução: Como no circuito externo de cada fonte não existe um resistor, mas sim outra fonte, não será possível encontrar a diferença de potencial nos terminais utilizando a fórmula (1), sendo necessário utilizar a fórmula (6). Encontramos a intensidade da corrente no circuito pela fórmula (4):

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r_2 + r_1},$$

a corrente flui no sentido horário (na direção das forças externas da segunda fonte). Para encontrar a diferença de potencial, você pode usar qualquer uma das equações

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_1 + Ir_1 = \mathcal{E}_2 - Ir_2,$$

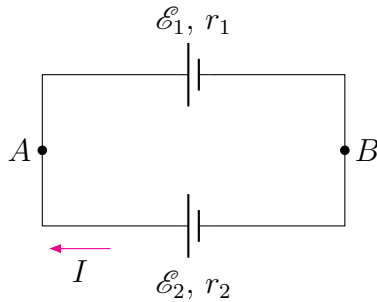


Figura 7:

cada um dos quais leva a um resultado

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} = 4 \text{ V}.$$

Exemplo 5. Duas fontes de corrente, a primeira com fem $\mathcal{E}_1 = 6 \text{ V}$ e resistência interna $r_1 = 1 \Omega$, o segundo com fem $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ V}$ e resistência interna $r_2 = 4 \Omega$, são conectados em série e em curto com alguma resistência externa. Em que valor desta resistência a tensão nos terminais de uma das fontes será igual a zero?

Solução: À primeira vista, pode haver duas respostas para o problema - dependendo de qual fonte a tensão é zero. No entanto, verifica-se que apenas uma opção pode ser implementada.

Suponhamos que a diferença de potencial nos terminais da primeira fonte seja zero. Isso significa que $\mathcal{E}_1 - I r_1 = 0$, ou seja, a corrente no circuito é igual à corrente de curto-circuito da primeira fonte: $I = \mathcal{E}_1 / r_1$. Substituindo esta corrente na lei de Ohm para o circuito completo (fórmula (4)), expressamos R :

$$R = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} r_1 - r_2.$$

Esta expressão é positiva se $\mathcal{E}_2 / r_2 > \mathcal{E}_1 / r_1$, ou seja, $I_{cc,1} > I_{cc,2}$. Conclusão: é possível zerar a tensão nos terminais da fonte que possui menor corrente de curto-circuito. Neste caso, não é a primeira, mas a segunda fonte. A diferença de potencial em seus terminais irá para zero quando

$$R = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} r_2 - r_1 = 2 \Omega.$$

Pergunta: Num circuito fechado, a diferença de potencial nos terminais de todas as fontes pode ser igual a zero?

Resposta: Talvez. O exemplo mais simples e famoso: um circuito composto por apenas n fontes idênticas conectadas em série. Um caso mais geral: as fontes podem ser diferentes, mas devem ter as mesmas correntes de curto-circuito.

E agora - vários problemas sobre a lei da conservação da energia.

Exemplo 6. Lâmpadas com resistências $R_1 = 3 \Omega$ e $R_2 = 12 \Omega$, conectadas alternadamente a uma fonte de corrente, consomem a mesma energia. Quantas vezes a eficiência da fonte de corrente é maior no segundo caso do que no primeiro?

Solução: Vamos igualar as potências térmicas liberadas no circuito externo para diversas resistências externas:

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{r + R_1}\right)^2 R_1 = \left(\frac{\mathcal{E}}{r + R_2}\right)^2 R_2.$$

A partir desta equação, após as transformações, encontramos a resistência interna da fonte

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

A eficiência da fonte pode ser expressa através de diferentes parâmetros; a fórmula é conveniente para nós

$$\eta = \frac{P_{util}}{P_{tot}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r}$$

(a potência total da fonte é igual à potência térmica liberada em todas as resistências do circuito). Nós temos

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{R_2}{R_2 + \sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{R_1 + \sqrt{R_1 R_2}}{R_1} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = 2.$$

Exemplo 7. O circuito elétrico consiste em uma fonte de corrente e um reostato. A fem da fonte é $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$, sua resistência interna é $r = 2 \Omega$. A resistência do reostato pode ser alterada de 1Ω a 5Ω . Qual é a potência máxima de corrente liberada pelo reostato?

Solução: Como neste caso existe uma resistência (reostato) no circuito externo, é possível estudar a dependência máxima da potência útil da resistência externa. Contudo, é matematicamente mais fácil estudar a dependência da potência útil na intensidade da corrente: $P(I) = \mathcal{E}I - I^2 r$ (fórmula (8)). Além disso, esta fórmula é de natureza mais geral, sendo aplicável a qualquer conteúdo da cadeia externa. Esta relação pode ser facilmente explorada utilizando a derivada, mas é mais útil fazê-lo graficamente. O gráfico $P(I)$ é uma parábola (Fig. 8), cruzando o eixo x nos pontos $I_1 = 0$ e $I_2 = \mathcal{E}/r$ (corrente de curto-circuito), e

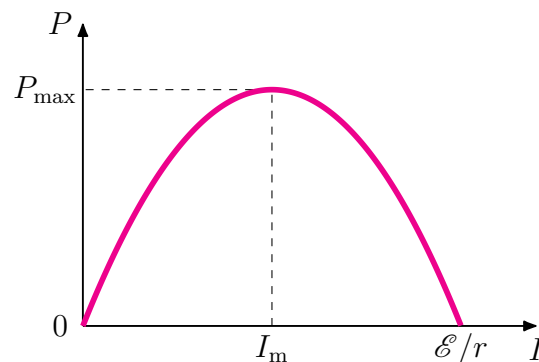


Figura 8:

portanto tem um máximo no meio entre eles, ou seja, no

$$I_m = \frac{\mathcal{E}}{2r} \tag{11}$$

Substituindo esta expressão na dependência $P(I)$, encontramos o valor máximo da potência útil

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}. \quad (12)$$

Comparando a fórmula (11) com a lei de Ohm para um circuito completo, vemos que a potência útil máxima é alcançada quando a resistência externa é igual à resistência interna da fonte: $R_m = r$. Este fato (em si importante e interessante) tem um significado adicional para este problema: a resistência $R_m = r = 2 \Omega$ está dentro da faixa de resistência especificada (de 1Ω a 5Ω). Portanto, a potência útil máxima em uma determinada faixa é igual a

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 4.5 \text{ W}.$$

Exemplo 8. Quando a corrente no circuito é $I_1 = 2 \text{ A}$, a potência útil da bateria é $P_1 = 10 \text{ W}$, e quando a corrente é $I_2 = 4 \text{ A}$, sua potência útil é $P_2 = 16 \text{ W}$. Qual é a energia mais utilizável que esta bateria pode fornecer?

Solução: Vamos escrever a fórmula (8) para a potência útil da fonte no primeiro e segundo casos:

$$P_1 = \mathcal{E}I_1 - I_1^2r, \quad P_2 = \mathcal{E}I_2 - I_2^2r,$$

Vamos passar para os números e encontrar a fem e a resistência interna da fonte

$$\mathcal{E} = 6 \text{ V}, \quad r = 0.5 \Omega.$$

Substituindo esses valores na fórmula (12) (é necessário reproduzir seu resultado durante o exame), obtemos

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 18 \text{ W}.$$

Exemplo 9. O motor elétrico de um bonde opera com uma corrente $I = 100 \text{ A}$ e uma tensão $U = 500 \text{ V}$. Com uma força de tração do motor $F = 4 \text{ kN}$, a velocidade do carro é $v = 18 \text{ km/h}$. Qual é a resistência do enrolamento do motor?

Solução: A potência útil da seção do circuito que absorve energia elétrica para realizar o trabalho é expressa pela fórmula $P = UI - I^2R$, onde R é a resistência do enrolamento do motor. Igualando esta expressão à potência mecânica do bonde $P = Fv$, encontramos a resistência do enrolamento

$$R = \frac{UI - Fv}{I^2} = 3 \Omega.$$

Problemas:

1. Um amperímetro com resistência interna de 2Ω conectado aos terminais da bateria mostra uma corrente de 5 A . Um voltímetro com resistência interna de 150Ω conectado aos terminais da mesma bateria mostra 12 V . Encontre a corrente de curto-circuito da bateria
2. Duas fontes de corrente, a primeira com fem de 5 V e resistência interna de 1Ω , a segunda com fem de 3 V e resistência interna de 3Ω , são conectadas em série e em curto com uma resistência externa de 12Ω . Quantas vezes a diferença de potencial na primeira fonte é maior do que na segunda?

- 3.** A bateria consiste em elementos conectados em série com uma resistência interna de 0.2Ω e uma fem de 0.5 V cada. Quando a corrente no circuito externo é de 2 A , a potência útil da bateria é de 1 W . Quantas células existem em uma bateria?
- 4.** A potência útil da bateria é de 6 W em dois valores de corrente no circuito: 2 A e 6 A . Qual é a potência útil máxima desta bateria?
- 5.** Um motor elétrico levanta uma carga de 50 Kg com velocidade de 2 m/s . Em que tensão o motor opera se uma corrente de 10 A flui através de seu enrolamento com resistência de 12Ω ?