Máquina de Atwood:

Exemplo #1: Uma polia sem massa está pendurada em um suporte fixo. Um fio sem massa conectando duas massas, m_1 e m_2, está pendurado na polia (ver Fig 1). Encontre a aceleração das massas e a tensão na corda.

Solução: Seja T a tensão na corda. Pela segunda lei de Newton temos

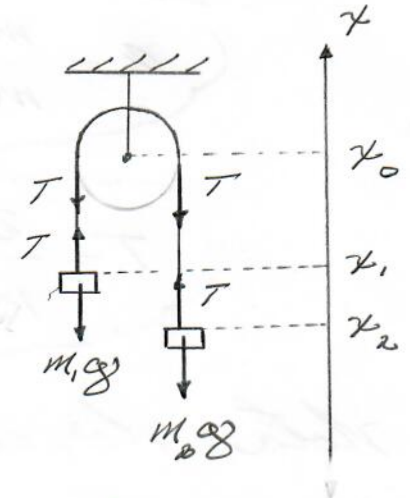


Fig 1.

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases} \quad (1)$$

Note que o comprimento da corda é uma constante e pode ser escrito como

$$\ell = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_0) + \pi R \quad (2)$$

onde R é o raio da polia. No instante de tempo $\Delta t \to 0$ após o início do mov temos

$$\ell = (x_1' - x_0) + (x_2' - x_0) + \pi R \quad (3)$$

Pelas equações (2) e (3)

$$(x_1' - x_1) + (x_2' - x_2) = 0$$

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2 \Rightarrow a_1 = -a_2 \quad (4)$$

Então

$$T - m_1 g = m_1 a$$
$$m_2 g - T = m_2 a$$

Somando

$$g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2)$$

Então

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g}$$

$$\boxed{T = \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g}$$

Nota: Nos casos

$$m_2 \gg m_1 \implies a \to g$$
$$m_1 \gg m_2 \implies a \to -g$$
$$m_1 = m_2 \implies a = 0.$$

Como a tensão da corda inferior é T, então a tensão da corda superior é $2T$. (equilibrando as forças na polia inferior).

Exemplo #2: Uma máquina dupla de Atwood é mostrada na Fig 2, com massas m_1, m_2 e m_3. Quais são as acelerações das massas?

Solução: Primeiro vamos utilizar a segunda lei de Newton

$$\begin{cases} 2T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \quad (1) \\ T - m_3 g = m_3 a_3 \end{cases}$$

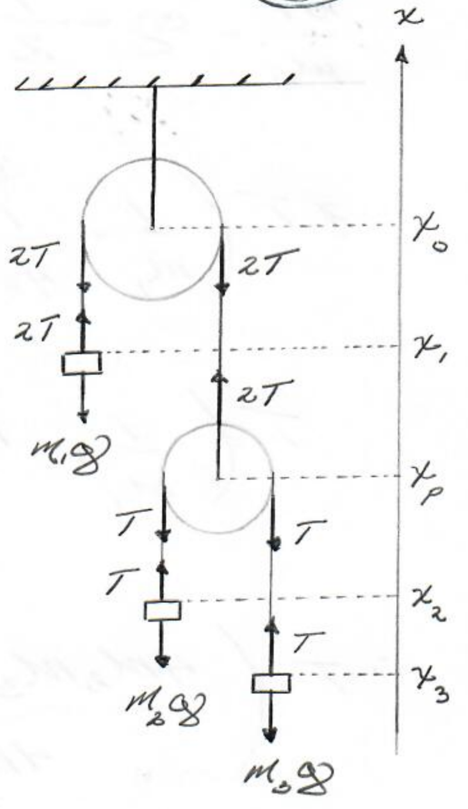


Fig 2.

Seja que l_1 e l_2 são os comprimentos das cordas superior e inferior

$$l_1 = (x_1 - x_0) + (x_p - x_0) + \pi R_1$$
$$l_2 = (x_3 - x_p) + (x_2 - x_p) + \pi R_2 \quad (2)$$

Após um tempo $\Delta t \to 0$ teremos que

$$l_1 = (x_1' - x_0) + (x_p' - x_0) + \pi R_1$$
$$l_2 = (x_3' - x_p') + (x_2' - x_p') + \pi R_2 \quad (3)$$

Pelas equações (2) e (3) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta x_1 + \Delta x_p &= 0 \\ \Delta x_3 + \Delta x_2 - 2\Delta x_p &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \Delta x_1 = -\frac{1}{2}\left(\Delta x_2 + \Delta x_3\right) \quad (4)$$

Ou seja que as acelerações são vinculadas por

$$a_1 = -\frac{1}{2}\left(a_2 + a_3\right). \quad (5)$$

Utilizando (1) e (5) obtemos

$$\frac{2T - m_1 g}{m_1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{T - m_2 g}{m_2} + \frac{T - m_3 g}{m_3}\right)$$

$$\frac{2T}{m_1} - g = -\frac{1}{2}\left(\frac{T}{m_2} - g + \frac{T}{m_3} - g\right)$$

$$\frac{2T}{m_1} - g = -\frac{T}{2}\left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_2}\right) + g$$

$$\cancel{2}T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{4m_2} + \frac{1}{4m_3}\right) = \cancel{2}g$$

$$T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{m_3+m_2}{4m_2m_3}\right) = g$$

$$T\left(\frac{4m_2m_3 + m_1(m_3+m_2)}{4m_1m_2m_3}\right) = g$$

$$T = \frac{4m_1m_2m_3\,g}{4m_2m_3 + m_1(m_3+m_2)} \qquad (5)$$

Então

$$\frac{8m_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_3+m_2)}\,g - m_1 g = m_1 a_1$$

$$a_1 = g\left[\frac{8m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)} - 1\right]$$

$$a_1 = g\,\frac{4m_2m_3 - m_1(m_2+m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)} \qquad (6)$$

$$\frac{4m_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_3+m_2)}\,g - m_2 g = m_2 a_2$$

$$a_2 = g\left[\frac{4m_1 m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)} - 1\right]$$

$$a_2 = -g\,\frac{4m_2m_3 + m_1(m_2 - 3m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)} \qquad (7)$$

Finalmente

$$\frac{4m_1m_2\cancel{m_3}}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}\,g - \cancel{m_3}\,g = \cancel{m_3}\,a_3$$

$$a_3 = g\left[\frac{4m_1m_2}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)} - 1\right]$$

$$a_3 = -g\,\frac{4m_2m_3 + m_1(m_3 - 3m_2)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)} \qquad (8)$$

Nota: Existem muitos limites que podemos verificar aqui:

1) Se $m_2 = m_3 = \frac{m_1}{2} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

2) Se $m_3 \ll m_2, m_1 \Rightarrow a_1 = g,\ a_2 = -g$ e $a_3 = 3g$

Para entender esse $3g$, convença-se de que se m_1 e m_2 diminuem em d, então m_3 aumenta em $3d$.

Nota: A aceleração a_1 pode ser escrita como

$$a_1 = g\,\frac{\frac{4m_2m_3}{m_2+m_3} - m_1}{\frac{4m_2m_3}{m_2+m_3} + m_1}$$

Exemplo #3: Considere a máquina infinita de Atwood mostrada na Fig 3. Uma corda passa por cada polia, com uma extremidade presa a uma massa e a outra extremidade presa a outra polia. Todas as massas são iguais a m, e todas as polias e cordas não têm massa. As massas são mantidas fixas e depois liberadas simultaneamente. Qual é a aceleração da massa superior?

Comentário: Você pode definir o sistema infinito da seguinte maneira. Considere-o feito de N polias, com uma massa diferente de zero substituindo o que teria sido a $(N+1)$-ésima polia. Então considere o limite $N \to \infty$.

Primeira Solução: Se a intensidade da gravidade na Terra fosse multiplicada por um fator η, então a tensão em todas as cordas da máquina de Atwood também seria multiplicada por η. Isto é verdade porque a única maneira de produzir uma quantidade com unidades de tensão (ou seja, força) e multiplicar uma massa por g. Por outro lado, se colocarmos a máquina de Atwood em outro planeta e descobrirmos que todas as tensoes são multiplicadas por η, então sabemos que a gravidade ali deve ser ηg.

(7)

Deixe a tensão na corda acima de primeira polia ser T. Então a tensão na corda acima da segunda polia é T/2 (porque a polia não tem massa). Seja a_2 a aceleração descendente da segunda polia. Então a segunda polia move "efetivamente" num mundo onde a gravidade tem intensidade $g - a_2$

Considere o subsistema de todas as polias, exceto a superior. Este subsistema infinito é idêntico ao sistema infinito original de todas as polias. Portanto, pelos argumentos do primeiro parágrafo acima, devemos ter

$$\frac{T}{g} = \frac{T/2}{g - a_2} \Rightarrow a_2 = g/2. \quad (1)$$

Mas a_2 é também a aceleração da massa superior.

Nota: Você pode mostrar que a aceleração relativa da segunda e da terceira polias é $g/4$, e a da terceira e da quarta é $g/8$, etc.

A aceleração de uma massa bem abaixo no sistema é, portanto, igual a

$$g\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \dots\right) = g,$$

o que faz sentido intuitivamente

$$\frac{T}{g} = \frac{T/4}{g - a_2 - a_3} \Rightarrow g - a_2 - a_3 = g/4$$

$$g/2 - a_3 = g/4$$

$$a_3 = g/4$$

$$\frac{T}{g} = \frac{T/8}{g - a_2 - a_3 - a_4} \Rightarrow g - a_2 - a_3 - a_4 = g/8$$

$$g/4 - a_4 = g/8$$

$$a_4 = g/8$$

Nota: $T=0$ é solução da equação (1). Mas corresponde com colocar uma massa zero no extremo inferior de um sistema de polias finito. (ver seguinte solução)

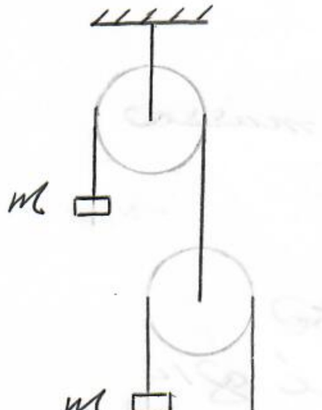


Fig 3.

Segunda Solução: Consideremos el seguinte problema auxiliar.

Problema: Duas configurações são mostradas na Fig 2.29. O primeiro contém uma massa suspensa m. O segundo contém uma polia, sobre a qual estão penduradas duas massas m_1 e m_2. Deixem ambos os suportes terem acelerações para baixo. Qual debe ser m, em termos de m_1 e m_2, para que a tensão na corda superior seja a mesma em ambos os casos?

Solução: No primeiro caso temos que

$$m g - T = m a_s \quad (1)$$

No segundo caso

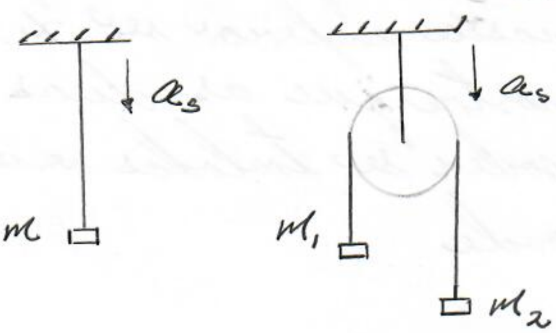


Fig 4.

$$\begin{cases} m_1 g - \frac{T}{2} = m_1 (a_s - a) \\ m_2 g - \frac{T}{2} = m_2 (a_s + a) \end{cases} \quad (2)$$

Definimos $g' \equiv g - a_s$, então

$$\begin{cases} m g' = T \\ m_1 g' = \frac{T}{2} - m_1 a \\ m_2 g' = \frac{T}{2} - m_2 a \end{cases} \quad (3)$$

de onde obtemos

$$T = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g' \Rightarrow m = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Note que o valor de a_s é irrelevante. Temos efetivamente um suporte fixo num mundo onde a aceleração da gravidade é g'. A resposta não pode depender de g', por análise dimensional. Este problema auxiliar mostra que o sistema de duas massas no segundo caso pode ser tratado equivalentemente como uma massa m, dada pela equação (4).

Agora vamos dar um retorno na nossa máquina infinita de Atwood. Suponha que o sistema possua N polias, onde $N \to \infty$. Deixe a massa inferior ser x. Então o problema auxiliar mostra que as duas massas inferiores, m e x, podem ser tratadas como uma massa efetiva $f(x)$, onde

$$f(x) = \frac{4mx}{m+x} = \frac{4x}{1+(x/m)} \quad (5)$$

Então podemos tratar a $f(x)$ e a outra massa m como uma massa efetiva $f(f(x))$. Essas iterações podem ser repetidas até que finalmente tenhamos uma massa m e uma massa $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{N-1} = f^{(N-1)}(x)$ penduradas na polia superior. Portanto devemos determinar o comportamento de $f^{(N)}(x)$ com $N \to \infty$.

Esse comportamento fica claro se observarmos o gráfico de $f(x)$ na Fig 5

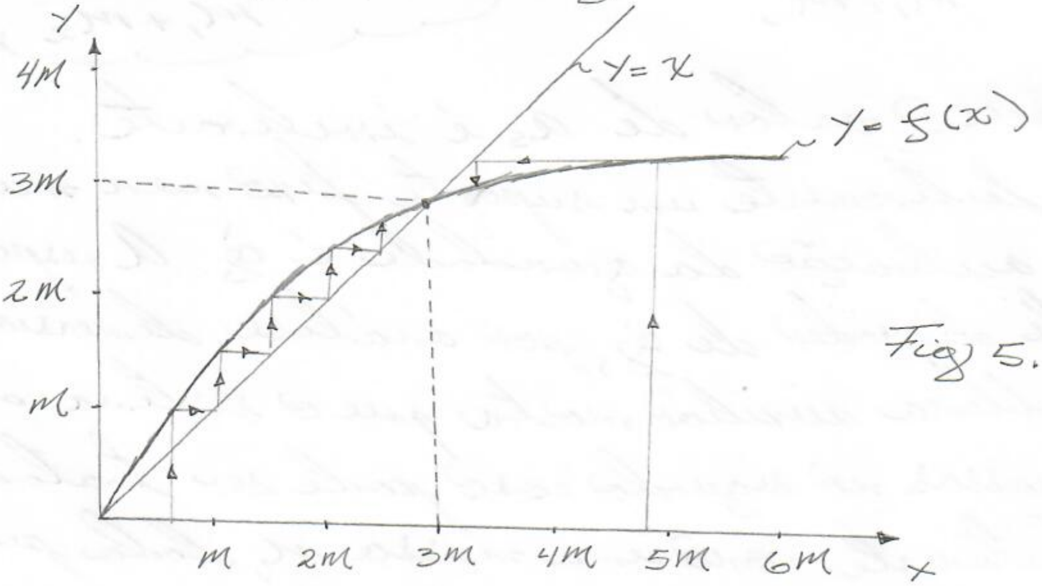


Fig 5.

Vemos que $x = 3m$ é um ponto fixo de $f(x)$. Ou seja $f(3m) = 3m$.

Este gráfico mostra que não importa com que x começamos, as iterações se aproximam de $3m$ (a menos que iniciemos em $x=0$, caso em que permanecemos lá). Essas iterações são mostradas graficamente pelas linhas direcionadas no gráfico. Depois de atingir o valor $f(x)$ na curva, a linha se move horizontalmente para o valor x de $f(x)$ e depois verticalmente para o valor $f(f(x))$ na curva e assim por diante. Portanto, como $f^{(N)}(x) \to 3m$ como $N \to \infty$, nossa máquina infinita de Atwood é equivalente a apenas duas massas, m e $3m$. Você pode então mostrar rapidamente que a aceleração da massa superior é $g/2$.

Exemplo #4 No arranjo mostrado na Fig 6, a massa da esfera 1 é $\eta = 1.8$ vezes maior do que a massa da haste 2. O comprimento desta última é $l = 100$ cm. As massas das polias e dos fios, bem como do atrito, são desprezíveis. A esfera é colocada no mesmo nível da extremidade inferior da haste e, então, é liberada. Após quanto tempo a esfera estará nivelada com a extremidade superior da haste?

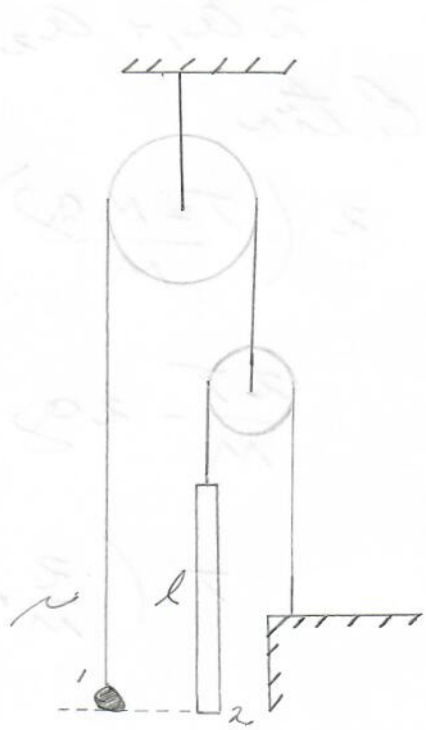


Fig 6

Solução: Pela segunda lei de Newton na esfera temos que

$$T - Mg = Ma_1 \quad (1)$$

na haste temos

$$\frac{T}{2} - mg = m a_2 \quad (2)$$

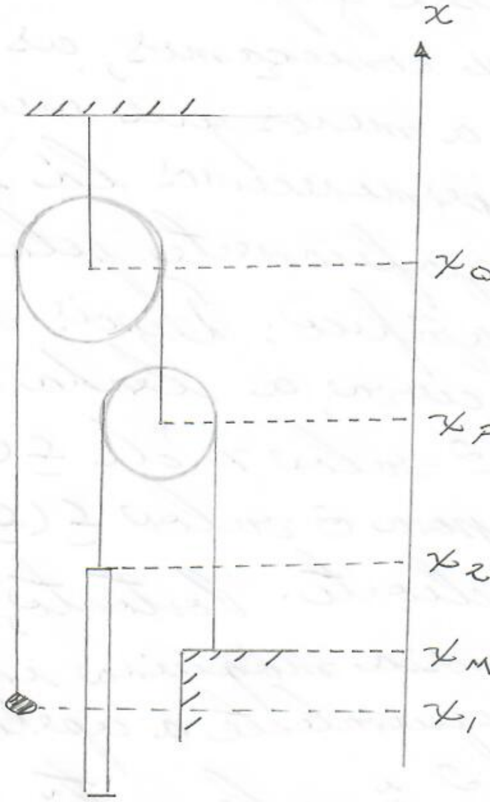


Fig 7.

Os comprimentos dos fios são const, então

$$l_1 = (x_1 - x_0) + (x_p - x_0) + \pi R_1$$

$$l_2 = (x_M - x_p) + (x_2 - x_p) + \pi R_2$$

Então, após $\Delta t \to 0$ temos que

$$\Delta x_1 + \Delta x_p = 0$$

$$-2\Delta x_p + \Delta x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$$

Ou seja que

$$2a_1 + a_2 = 0 \quad (3)$$

Então

$$2\left(\frac{T - Mg}{M}\right) + \left(\frac{T}{2} - mg\right)\frac{1}{m} = 0$$

$$\frac{2T}{M} - 2g + \frac{T}{2m} - g = 0$$

$$T\left(\frac{2}{M} + \frac{1}{2m}\right) = 3g$$

Conhecemos que $M = \eta m$, então

$$T\left(\frac{2}{\eta m} + \frac{1}{2m}\right) = 3g$$

$$\frac{T}{m} \cdot \left(\frac{4+\eta}{2\eta}\right) = 3g$$

$$\frac{T}{m} = \frac{6\eta}{4+\eta} g \quad (4)$$

Pelas equações (4) e (1)

$$\frac{6}{4+\eta} g - g = a_1$$

$$a_1 = g\left(\frac{6}{4+\eta} - 1\right)$$

$$a_1 = \left(\frac{2-\eta}{4-\eta}\right) g \quad (5)$$

$$a_2 = -2\left(\frac{2-\eta}{4+\eta}\right) g \quad (6)$$

No sistema de referência que se move com a haste temos que

$l = \frac{w t^2}{2}$ onde w é a aceleração da esfera neste sistema de referência.

Ou seja $w = a_1 - a_2 = a_1 + 2a_1 = 3a_1$

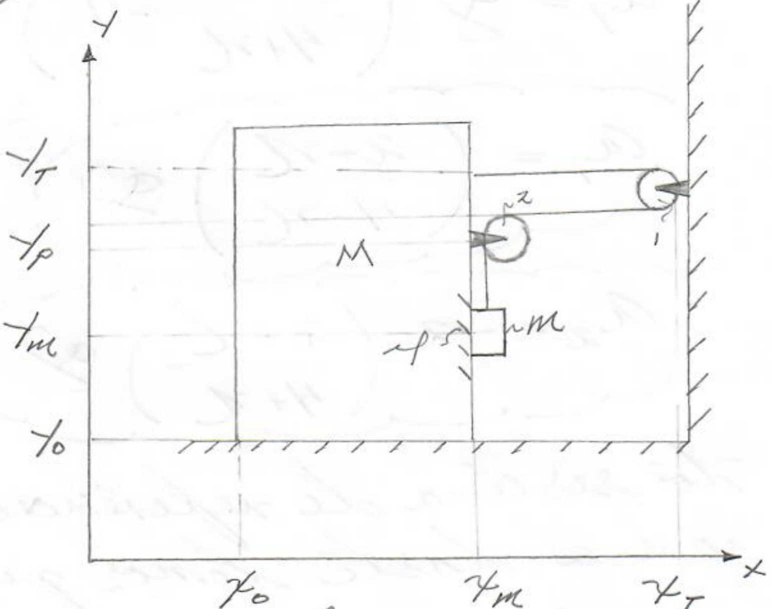
$$l = \frac{3 a_1 t^2}{2}$$

$$\ell = \frac{3(2-\mu)\, g\, t^2}{2(4+\mu)}$$

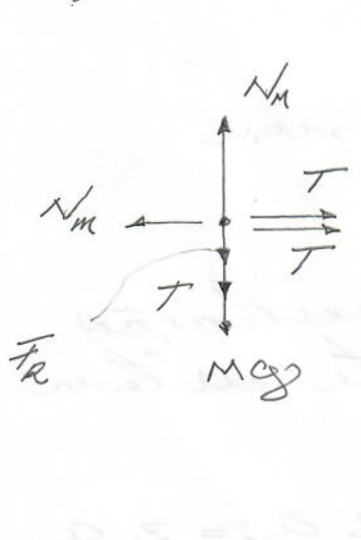
$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2\ell(4+\mu)}{3g(2-\mu)}}}$$

Example # 5. No sistema mostrado na Fig 8, um corpo de massa M pode deslizar sem atrito ao longo de um plano horizontal. O coeficiente de atrito entre os corpos com massas M e m é igual a μ. Encontre a aceleração do corpo de massa M. Despreze as massas das polias e do fio. O fio é inextensível.

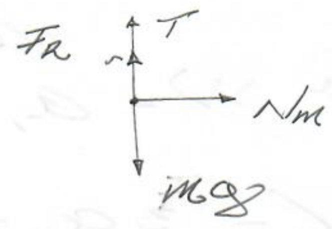
Solução: Vejamos os diagramas de forças dos corpos



Corpo de massa M



Corpo de massa m



Pela segunda lei de Newton, no corpo de massa m, obtemos

$$\begin{cases} m\,a_{mx} = N_m \\ m\,a_{my} = \mu N_m + T - m g \end{cases} \quad (1)$$

No corpo de massa M

$$\begin{cases} M\,a_M = 2T - N_m \\ 0 = N_M - \mu N_m - T - M g \end{cases} \quad (2)$$

Pelas equações (1) e a primeira equação (2) obtemos

$$\begin{cases} m\,a_{my} = \mu m\,a_{mx} + T - m g \\ M\,a_M = 2T - m\,a_{mx} \end{cases} \quad (3)$$

Eliminando T no sistema (3) obtemos

$$m\,a_{my} = \mu m\,a_{mx} + \frac{M a_M + m\,a_{mx}}{2} - m g \quad (4)$$

É claro que a aceleração do corpo de massa M é igual à aceleração em x do corpo de massa m. Ambos os corpos se movem juntos. Então $a_M = a_{mx}$. A equação (4) então tem a forma

$$m\,a_{my} = \mu m\,a_{mx} + (M+m)\frac{a_{mx}}{2} - m g \quad (5)$$

O comprimento da corda é const, então (16)

$$l = (y_p - y_m) + \frac{\pi R_2}{2} + 2(x_T - x_m) + \pi R_1$$

Após o tempo $\Delta t \to 0$, temos que

$$l = (y_p - y_m') + \frac{\pi R_2}{2} + 2(x_T - x_m') + \pi R_1$$

Então pelas equações anteriores

$$-\Delta y_m - 2\Delta x_m = 0$$

ou seja $a_{my} = -2a_{mx}$ (6)

Pelas equações (5) e (6)

$$-2m\, a_{mx} = \mu m\, a_{mx} + (M+m)\frac{a_{mx}}{2} - mg$$

$$-4m\, a_{mx} = 2\mu m\, a_{mx} + (M+m)\, a_{mx} - 2mg$$

$$2\mu m\, a_{mx} + 5m\, a_{mx} + M\, a_{mx} = 2mg$$

$$a_{mx}\left[M + (5+2\mu)m\right] = 2mg$$

$$a_{mx} = a_M = \frac{2mg}{M+(5+2\mu)m}$$