

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Vínculos Geométricos em Problemas Dinâmicos

São Paulo | 15 de Abril de 2024.

Resumo

Estas notas foram criadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP).

requentemente no estudo da dinâmica é suficiente com poder identificar todas as forças que atuam num corpo (ou num sistema de corpos), além do estado inicial do mesmo para determinar como será o movimento *a posteriori* do mesmo. Parece uma tarefa simples, mas não é tão simples assim. Em problemas olímpicos, onde geralmente existe mais de um corpo, identificar todas as forças as vezes é confuso, e, mesmo conseguindo identificar elas os problemas podem requerer de certas relações cinemáticas entre os deslocamentos, velocidades e acelerações dos diferentes corpos do sistema. As relações cinemáticas mencionadas anteriormente são conhecidas como *equações de vínculo* ou simplesmente *vínculos* do problema, os vínculos mais importantes são os vínculos dos deslocamentos, estes são conhecidos como *vínculos geométricos*.

Vejam, mediante exemplos resolto, como são importantes os vínculos geométricos na solução de problemas.

Exemplo 1. Uma polia sem massa está pendurada em um suporte fixo. Um fio inextensível sem massa conectando duas massas, m_1 e m_2 , está pendurado na polia (ver Fig 1). Encontre as acelerações das massas e a tensão do fio.

Solução: Seja T a tensão no fio. Pela segunda lei de Newton obtemos que

$$\begin{cases} T - m_1g = m_1a_1 \\ T - m_2g = m_2a_2 \end{cases} \quad (1)$$

Note que o comprimento do fio é constante, pelo fato dele ser inextensível. Seja l o comprimento do fio, então se tomamos uma foto do sistema a tempo t podemos escrever o comprimento do fio em termos de suas posições, x_1 e x_2 , como

$$l = (x_1 - x_p) + (x_2 - x_p) + \pi R, \quad (2)$$

onde R é o raio da polia. No instante de tempo $t' = t + \Delta t$, onde $\Delta t \rightarrow 0$, as posições dos corpos serão x'_1 e x'_2 , então

$$l = (x'_1 - x_p) + (x'_2 - x_p) + \pi R. \quad (3)$$

Subtraindo equações (2) e (3) obtemos $(x'_1 - x_1) + (x'_2 - x_2) = 0$, o que implica que o deslocamento que um dos corpos experimenta na subida no tempo Δt é o mesmo deslocamento que o outro corpo experimenta na descida. Como o tempo Δt é muito pequeno, podemos garantir que a relação das velocidades instantâneas dos corpos será $v_1(t) + v_2(t) = 0$. Essa relação também será válida para as acelerações, ou seja

$$a_1 + a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_2 \equiv a. \quad (4)$$

A equação (4) é conhecida como *equação de vínculo* das acelerações dos corpos, e é uma consequência do vínculo geométrico entre os deslocamentos dos corpos.

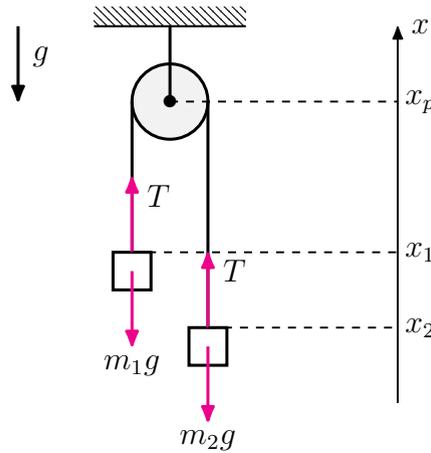


Fig 1

Utilizando a equação (4) podemos *compatibilizar* o sistema (1), então obtemos

$$\begin{cases} T - m_1g = m_1a \\ m_2g - T = m_2a \end{cases} \quad (5)$$

Somando ambas as equações do sistema obtemos

$$g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2) \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right) g. \quad (6)$$

Coloquemos a expressão obtida para a aceleração na primeira equação do sistema (5), então

$$T - m_1g = m_1 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right) g \quad \Rightarrow \quad T = \left[1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right] m_1g, \quad (7)$$

ou seja que

$$T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}. \quad (8)$$

Note que existem limites interessantes, por exemplo: $m_2 \gg m_1$ implica que $a \rightarrow g$, $m_2 \ll m_1$ implica que $a \rightarrow -g$, ou no caso $m_1 = m_2$ onde teremos que $a = 0$.

Exemplo 2. Uma máquina dupla de Atwood é mostrada na Fig 2, com corpos de massas m_1 , m_2 e m_3 . Os fios são inextensíveis e não tem massa. As polias não tem massa. Quais são as acelerações dos corpos?

Solução: Seja que T_1 e T_2 as tensões dos fios superior e inferior. Os comprimentos dos fios superior e inferior são l_1 e l_2 respectivamente. Pela segunda lei de Newton para o sistema de três corpos obtemos

$$\begin{cases} T_1 - m_1g = m_1a_1 \\ T_2 - m_2g = m_2a_2 \\ T_2 - m_3g = m_3a_3 \end{cases} \quad (9)$$

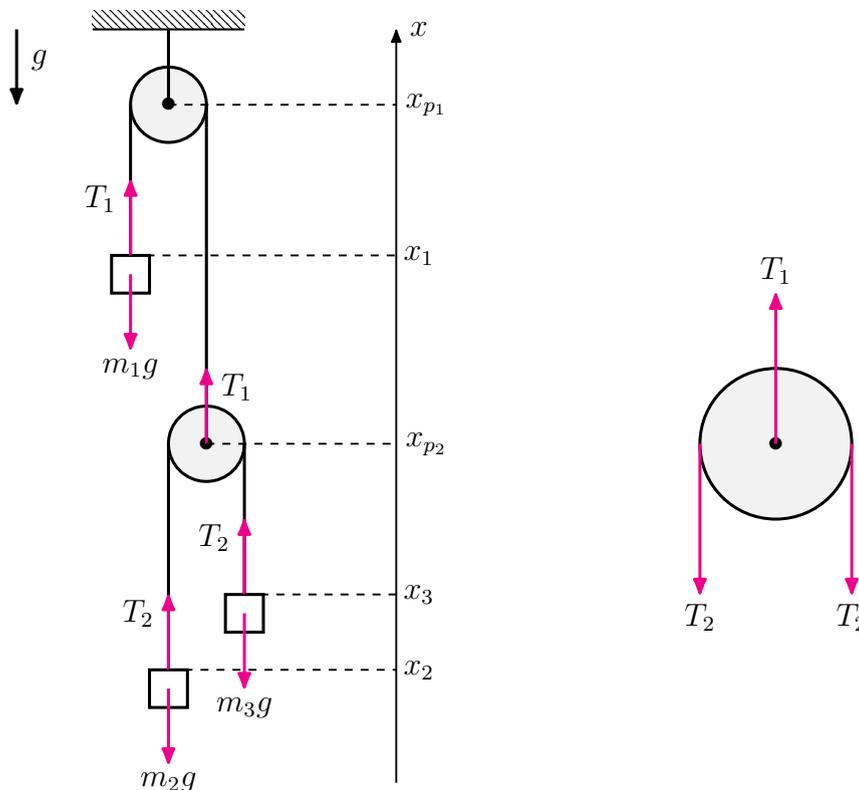


Fig 2

Se tomamos uma foto do sistema no tempo t , os comprimentos dos fios l_1 e l_2 podem ser escritos em termos das posições dos diferentes elementos do sistema, ou seja

$$l_1 = (x_1 - x_{p1}) + (x_{p2} - x_{p1}) + \pi R_1 \quad (10)$$

$$l_2 = (x_3 - x_{p2}) + (x_2 - x_{p2}) + \pi R_2 \quad (11)$$

Após um tempo $\Delta t = t' - t$ muito pequeno obtemos

$$l_1 = (x'_1 - x_{p1}) + (x'_{p2} - x_{p1}) + \pi R_1 \quad (12)$$

$$l_2 = (x'_3 - x'_{p2}) + (x'_2 - x'_{p2}) + \pi R_2 \quad (13)$$

Nas equações anteriores R_1 e R_2 são os raios das polias superior e inferior respectivamente. Subtraindo as equações (12) e (10) obtemos $(x'_1 - x_1) + (x'_{p_2} - x_{p_2}) = 0$ e, subtraindo as equações (13) e (11) obtemos $(x'_3 - x_3) - 2(x'_{p_2} - x_{p_2}) + (x'_2 - x_2) = 0$. Juntando as duas equações de vínculos geométricos obtemos

$$(x'_1 - x_1) = -\frac{(x'_2 - x_2) + (x'_3 - x_3)}{2}. \quad (14)$$

Como o tempo Δt é muito pequeno, podemos garantir que a relação das velocidades instantâneas e das acelerações dos corpos será

$$v_1(t) = -\frac{v_2(t) + v_3(t)}{2} \quad \text{e} \quad a_1 = -\frac{a_2 + a_3}{2}. \quad (15)$$

Os valores de T_1 e T_2 também estão relacionados. Vamos aplicar a segunda lei de Newton na polia móvel. Como a polia não tem massa, embora ela seja acelerada, então a soma das forças que atuam nela é zero, ou seja

$$T_1 - 2T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2T_2 = T. \quad (16)$$

Utilizando as equações (15), (16) e o sistema (9), obtemos

$$2\left(\frac{T}{m_1} - g\right) + \left(\frac{T}{2m_2} - g\right) + \left(\frac{T}{2m_3} - g\right) = 0 \quad (17)$$

de onde obtemos a tensão T do fio superior

$$T = \frac{8m_1m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)} \quad (18)$$

Utilizando a primeira equação do sistema (9) e a expressão de T , então

$$m_1a_1 = \frac{8m_1m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)} - m_1g \quad (19)$$

$$a_1 = \frac{8m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)} - g \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g. \quad (20)$$

Utilizando a segunda equação do sistema (9) e a expressão de T

$$m_2a_2 = \frac{4m_1m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)} - m_2g \quad (21)$$

$$a_2 = \frac{4m_1m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)} - g \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{4m_2m_3 - m_1(m_2 - 3m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g. \quad (22)$$

Finalmente, utilizando a terceira equação do sistema (9) e a expressão para T

$$m_3a_3 = \frac{4m_1m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)} - m_3g \quad (23)$$

$$a_3 = \frac{4m_1m_2g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)} - g \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{4m_2m_3 - m_1(m_3 - 3m_2)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g. \quad (24)$$

Existem muitos limites interessantes que podem ser verificados:

1. Se $m_2 = m_3 = m_1/2$ então $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
2. Se $m_3 \ll m_2, m_1$ então $a_1 = g$, $a_2 = -g$ e $a_3 = 3g$. Para entender esse $3g$, convença-se de que se m_1 e m_2 dessem $3d$, então m_3 sobe $3d$.
3. A aceleração a_1 pode ser escrita como

$$a_1 = \frac{\frac{4m_2m_3}{m_2 + m_3} - m_1}{\frac{4m_2m_3}{m_2 + m_3} + m_1}g = \frac{m_{2,3} - m_1}{m_{2,3} + m_1}g. \quad (25)$$

Exemplo 3. No arranjo mostrado na Fig 3, a massa da esfera 1 é $\eta = 1.8$ vezes maior do que a massa da haste 2. O comprimento da haste é $l = 100$ cm. As massas das polias e dos fios, bem como o atrito, são desprezíveis. A esfera é colocada no mesmo nível da extremidade inferior da haste e, então, é liberada. Após quanto tempo a esfera estará nivelada com a extremidade superior da haste?

Solução: Sejam T_1 e T_2 as tensões dos fios superior e inferior. Os comprimentos dos fios superior e inferior são l_1 e l_2 respetivamente. Pela segunda lei de Newton para a esfera e a haste obtemos

$$\begin{cases} T_1 - m_1g = m_1a_1 \\ T_2 - m_2g = m_2a_2 \end{cases} \quad (26)$$

Se tomamos uma foto do sistema no tempo t , os comprimentos dos fios podem ser escritos como

$$l_1 = (x_1 - x_{p1}) + (x_{p2} - x_{p1}) + \pi R_1, \quad (27)$$

$$l_2 = (x_0 - x_{p2}) + (x_2 - x_{p2}) + \pi R_2, \quad (28)$$

onde R_1 e R_2 são os raios das polias superior e inferior respetivamente. Após um tempo $\Delta t \rightarrow 0$ tomamos outra foto do sistema e obtemos que

$$l_1 = (x'_1 - x_{p1}) + (x'_{p2} - x_{p1}) + \pi R_1, \quad (29)$$

$$l_2 = (x_0 - x'_{p2}) + (x'_2 - x'_{p2}) + \pi R_2. \quad (30)$$

Finalmente pelas equações de vínculo, obtemos que $\Delta x_1 + \Delta x_{p2} = 0$ e $-2\Delta x_{p2} + \Delta x_2 = 0$. Juntando os vínculos entre deslocamentos obtemos que $2\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$, de onde podemos concluir que as acelerações da esfera e a haste satisfazem a condição $2a_1 + a_2 = 0$. Os valores das tensões cumprem que $T_1 = T$ e $T_2 = T/2$ (ver exemplo anterior), então utilizando o sistema (26) obtemos

$$\frac{2}{m_1}(T - m_1g) + \frac{1}{m_2}\left(\frac{T}{2} - m_2g\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{2}{m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = 3g. \quad (31)$$

Utilizando que $m_1 = \eta m_2$ obtemos que

$$T\left(\frac{2}{\eta m_2} + \frac{1}{2m_2}\right) = 3g \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{m_2} = \frac{6\eta g}{4 + \eta}. \quad (32)$$

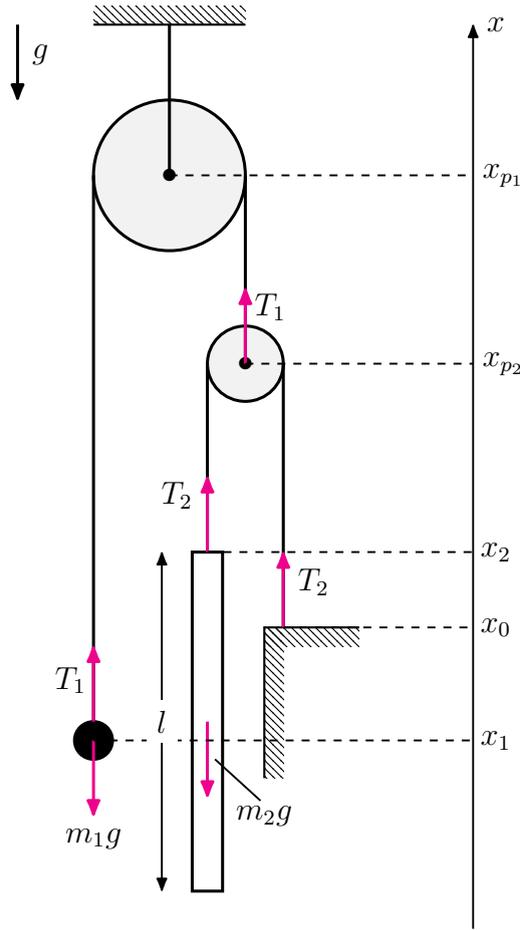


Fig 3

Pela equação (32) e a primeira equação do sistema (26), obtemos que

$$\frac{6g}{4+\eta} - g = a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{g} = \frac{2-\eta}{4+\eta}. \quad (33)$$

No sistema de referência que se move com a haste temos que a aceleração da esfera é $w = a_1 - a_2 = a_1 - (-2a_1) = 3a_1$. Como inicialmente a esfera estava no nível do extremo inferior da haste, então após o tempo τ , que satisfaz a equação $l = w\tau^2/2$, a esfera estará no nível do extremo superior da haste. Então temos que

$$l = \frac{3a_1}{2}\tau^2 = \frac{3(2-\eta)g\tau^2}{2(4+\eta)} \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2l(4+\eta)}{3g(2-\eta)}}. \quad (34)$$

Exemplo 4. No sistema mostrado na Fig 4, um corpo de massa M pode deslizar sem atrito ao longo de um plano horizontal. O coeficiente de atrito entre os corpos com massas M e m é igual a μ . Encontre a aceleração dos corpos, a tensão do fio e a força de interação entre os corpos. Despreze as massas das pequenas polias e do fio. O fio é inextensível.

Solução: Seja T a tensão da corda, no Fig 4 estão representadas as diferentes forças que atuam no corpo de massa m (forças vermelhas) e no corpo de massa M (forças azules). Pela

segunda lei de Newton, projetada no eixo x , no corpo de massa M obtemos

$$Ma_M = 2T - N_m, \quad (35)$$

também temos uma equação para o eixo y ,

$$0 = N_M - F_r - T - Mg, \quad (36)$$

mas para determinar a aceleração dos corpos esta equação é irrelevante (o corpo de massa M não pula).

No corpo de massa m temos que a segunda lei de Newton no eixo x pode ser escrita como $N_m = ma_{m,x}$, no eixo y teremos que

$$F_r + T - mg = ma_{m,y}. \quad (37)$$

Conhecemos que $F_r = \mu N_m$, então, utilizando a relação $N_m = ma_{m,x}$ obtemos que $F_r = \mu ma_{m,x}$. Note que o corpo de massa M move-se junto ao corpo de massa m no eixo x , ou seja, é evidente que $a_M = a_{m,x}$. Então utilizando a equação (35) obtemos que $2T = (M + m)a_{m,x}$.

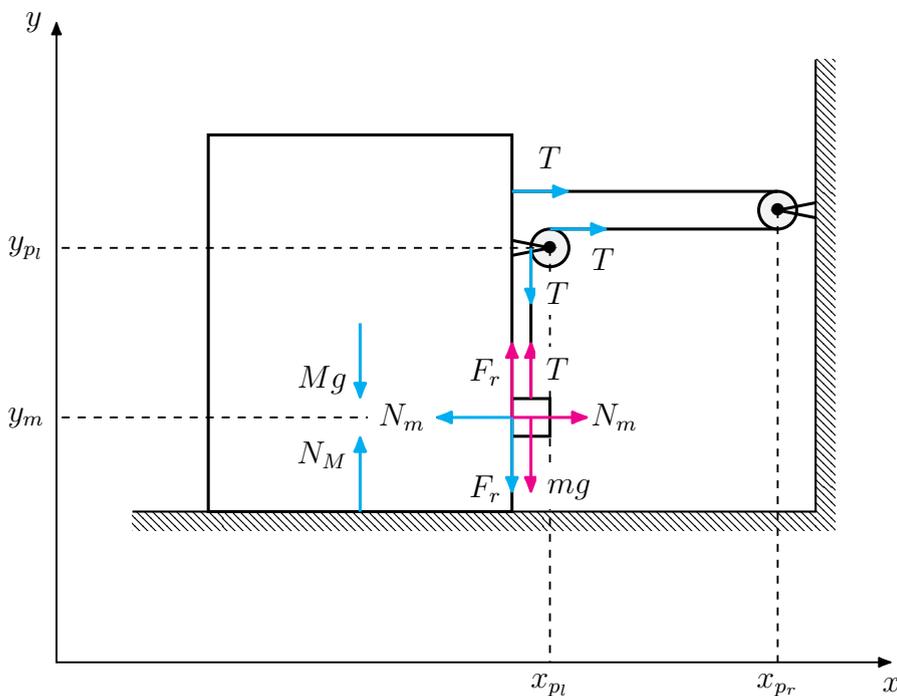


Fig 4

Pela equação (37) obtemos a seguinte relação entre as projeções da aceleração do corpo de massa m

$$2\mu ma_{m,x} + (M + m)a_{m,x} - 2mg = 2ma_{m,y}. \quad (38)$$

Seja l o comprimento do fio num tempo t , então ele pode ser escrito em função das posições dos corpos, ou seja

$$l = 2(x_{pr} - x_{pi}) + (y_{pi} - y_m), \quad (39)$$

como o fio é inextensível, após um tempo $\Delta t \rightarrow 0$, o comprimento é invariante e pode ser escrito como

$$l = 2(x_{pr} - x'_{pl}) + (y_{pl} - y'_m). \quad (40)$$

Finalmente pelas equações anteriores obtemos o seguinte vínculo entre os deslocamento do corpo de massa m nos eixos y e x , ou seja, $-2\Delta x_m - \Delta y_m = 0$ (perceba que $\Delta x_{pl} \equiv \Delta x_m$), então é claro que $a_{m,y} = -2a_{m,x}$. Finalmente pela equação (38), obtemos

$$2\mu m a_{m,x} + (M + m)a_{m,x} - 2mg = -4m a_{m,x} \Rightarrow a_{m,x} = \frac{2mg}{M + (5 + 2\mu)m}. \quad (41)$$

A aceleração do corpo de massa M é dada pela equação anterior, pero o corpo de massa m move-se em ambos os eixos, então a sua aceleração é $a_m = \sqrt{a_{m,x}^2 + a_{m,y}^2} = \sqrt{5}a_{m,x}$, então obtemos que

$$a_m = \frac{2\sqrt{5}mg}{M + (5 + 2\mu)m}. \quad (42)$$

Também podemos achar a tensão do fio, ou seja

$$T = (M + m)\frac{a_{m,x}}{2} = \frac{(M + m)mg}{M + (5 + 2\mu)m}. \quad (43)$$

A força total de interação entre os corpo, F , esta composta por duas forças respetivamente perpendiculares, a força de atrito $F_r = \mu N_m$ e a própria força N_m , então pelo teorema de Pitágoras

$$F = \sqrt{F_r^2 + N_m^2} = N_m \sqrt{1 + \mu^2} = m a_{m,x} \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{2m^2 g \sqrt{1 + \mu^2}}{M + (5 + 2\mu)m}. \quad (44)$$

Exemplo 5. Duas configurações são mostradas na Fig.5 A primeira configuração contém um corpo suspenso de massa m . A segunda configuração contém uma pequena polia sem massa, sobre a qual estão pendurados dois corpos de massas m_1 e m_2 . Em ambos os casos os suportes, onde as configurações estão penduradas, tem uma aceleração w para baixo. Qual deve ser a massa m , em termos das massas m_1 e m_2 , para que a tensão no fio superior seja a mesma em ambas as configurações?

Solução: Primeiramente vamos considerar que vetores apontando para cima são positivos e para baixo são negativos. Na primeira configuração, pela segunda lei de Newton obtemos

$$T - mg = -mw \Rightarrow T = m(g - w), \quad (45)$$

na segunda configuração obtemos o sistema

$$\begin{cases} T/2 - m_1 g = m_1 a_1 - m_1 w \\ T/2 - m_2 g = m_2 a_2 - m_2 w \end{cases} \quad (46)$$

pelo primeiro exemplo resolvido conhecemos que nesta configuração $a_1 = -a_2 \equiv a$, então o sistema anterior pode se escrito como

$$\begin{cases} T/2 - m_1 g = m_1 a - m_1 w \\ T/2 - m_2 g = -m_2 a - m_2 w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T/2 - m_1 g' = m_1 a \\ T/2 - m_2 g' = -m_2 a \end{cases}. \quad (47)$$

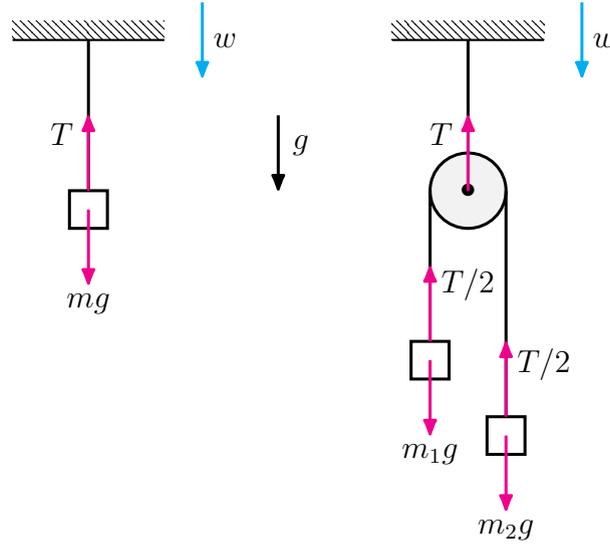


Fig 5

No sistema de equações anterior definimos $g' = g - w$. Note que o problema pode ser interpretado como uma máquina de Atwood simples pendurada de um suporte fixo num mundo de gravidade g' . Finalmente obtemos que a tensão do fio superior na segunda configuração é

$$T = \frac{4m_1m_2g'}{m_1 + m_2}. \quad (48)$$

Na primeira configuração temos que $T = mg'$. Então obtemos que

$$m = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}. \quad (49)$$

É claro, a resposta deste problema não pode depender de g' , por análise dimensional. Este exemplo mostra que a segunda configuração (sistema de duas massas) pode ser tratado equivalentemente como um sistema de massa m , dada pela equação (49).

Exemplo 6. Considere a máquina infinita de Atwood mostrada na Fig 6. Uma corda sem massa e inextensível passa por cada polia, com uma extremidade presa a uma massa e a outra extremidade presa a outra polia. Todas as massas são iguais a m , e todas as polias não tem massa. As massas são mantidas fixas e depois liberadas simultaneamente. Qual é a aceleração da massa superior?

Nota: O sistema infinito pode ser definido da seguinte forma: Considere-o feito de N polias, com uma massa diferente de zero substituindo o que teria sido a $(N + 1)$ -ésima polia. Finalmente analise o resultado com $N \rightarrow \infty$.

Primeira solução: Se o valor da gravidade na Terra fosse multiplicada por um fator η , então a tensão em todas as cordas da máquina de Atwood também seriam multiplicadas por η . Isto é verdade porque a única maneira de produzir uma quantidade com unidades de tensão (ou seja, de força) é multiplicando uma massa por g . Por outro lado, se colocamos a máquina de Atwood em um outro planeta e descobrimos que as tensões são multiplicadas por um fator η , então saberemos que a gravidade ali deve ser ηg .

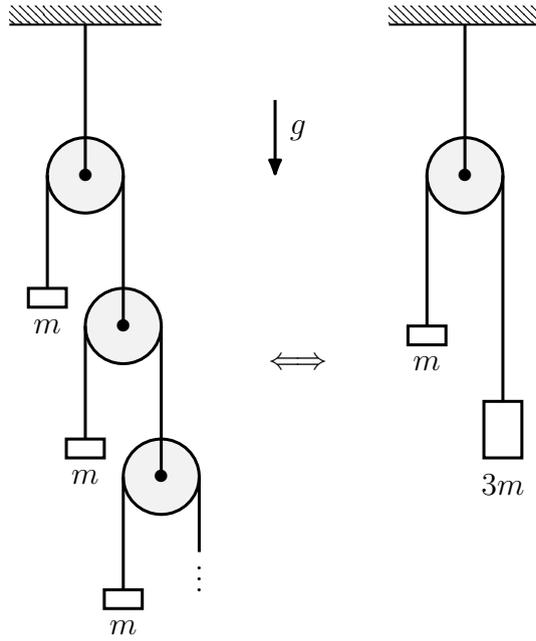


Fig 6

Seja que a tensão na corda acima da primeira polia é T , então a tensão na corda acima da segunda polia é $T/2$ (por que as polias não tem massa). Seja a_2 a aceleração descendente da segunda polia, então a segunda polia “mora efetivamente” num mundo onde a gravidade tem valor $g - a_2$.

Considere o subsistema de todas as polias, exceto a superior. Este subsistema infinito é idêntico ao sistema infinito original de todas as polias. Portanto pelos argumentos del primeiro parágrafo acima, devemos ter

$$\frac{T}{g} = \frac{T/2}{g - a_2} \Rightarrow a_2 = g/2, \quad (50)$$

mas a_2 é também a aceleração da massa superior.

Nota: Neste problema você pode mostrar que a aceleração relativa da segunda e terceira polia é

$$\frac{T}{g} = \frac{T/4}{g - a_2 - a_3} \Rightarrow a_3 = g/4, \quad (51)$$

a aceleração relativa da terceira e quarta polia é

$$\frac{T}{g} = \frac{T/8}{g - a_2 - a_3 - a_4} \Rightarrow a_4 = g/8, \quad (52)$$

e assim por diante. A aceleração de uma massa bem abaixo no sistema é, portanto, igual a

$$a_{N \rightarrow \infty} = g/2 + g/4 + g/8 + \dots = g \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = g, \quad (53)$$

o que faz sentido intuitivamente.

Nota: $T = 0$ é solução da equação (50). Mas corresponde com colocar uma massa zero no extremo inferior de um sistema de polias infinito. (ver a segunda solução deste problema).

Segunda solução: Suponha que o sistema possua $N \rightarrow \infty$ polias. Deixe a massa inferior ser x . Então pelo exemplo anterior conhecemos que as duas massas inferiores, m e x , podem ser tratadas como uma massa $f(x)$ onde

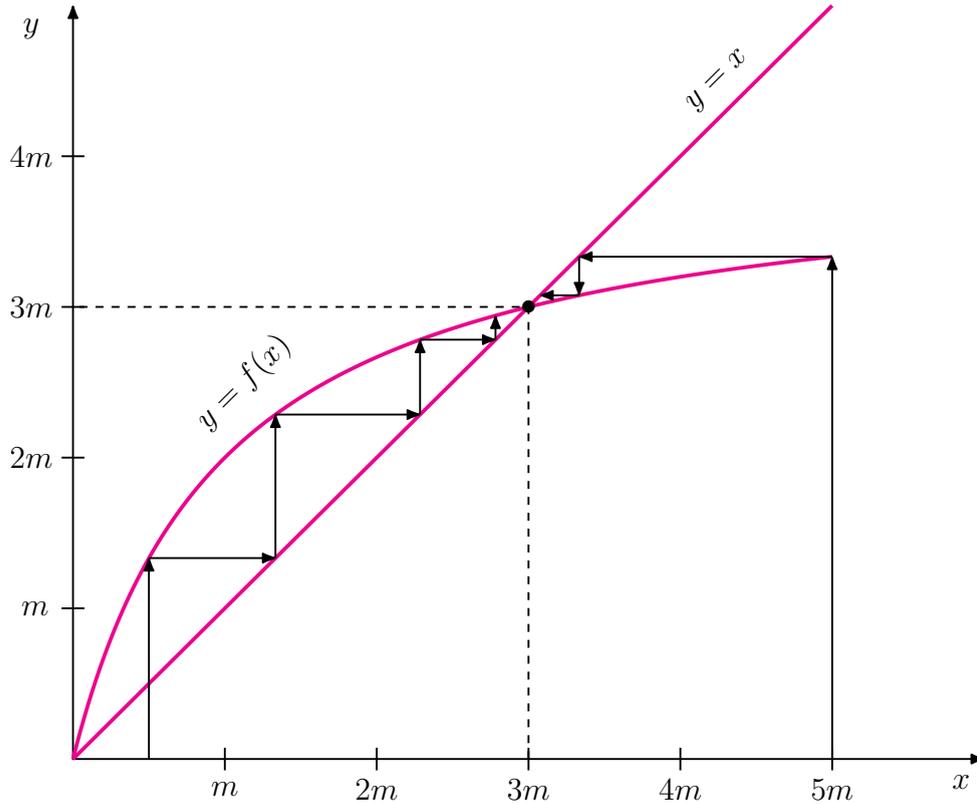


Fig 7

$$f(x) = \frac{4mx}{m+x} = \frac{4x}{1+(x/m)}, \quad (54)$$

logo teremos uma sistema equivalente de $N - 1$ polias com massa inferior $f(x)$. As duas massas inferiores do novo sistema, m e $f(x)$, podem ser tratadas como uma massa $f(f(x) \equiv f^{(2)}(x))$. Então agora teremos um sistema equivalente de $N - 2$ polias com massa inferior $f^{(2)}(x)$. Repetindo este procedimento $N - 1$ vezes obtemos um sistema equivalente de uma polia com duas massas, m (massa superior) e $f^{(N-1)}(x)$, como é mostrado na Fig. O problema equivalente que resulta é exatamente o primeiro exemplo analisado nestas notas, então a aceleração, a , da primeira massa do sistema será

$$\frac{a}{g} = \frac{f^{(N-1)}(x) - m}{f^{(N-1)}(x) + m} \quad \text{onde } N \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Finalmente só necessitamos achar o valor de $f^{(N-1)}(x)$ quando $N \rightarrow \infty$. Vamos desenhar a função $f(x)$, ver Fig 7. Primeiramente notamos que o $f(x) = x$ implica que $x = 3m$, ou

seja, a função apresenta um *punto fijo* em $x = 3m$. O gráfico mostra que não importa com que valor de x começamos, as iterações se aproximam ao valor de $3m$ (a menos que iniciemos em $x = 0$, caso em que permanecemos lá). Essas iterações são mostradas graficamente pelas linhas direcionadas e significam aplicar a função muitas vezes no próprio valor. Depois de atingir o valor $f(x)$ na curva, a linha se move horizontalmente para o valor $x_1 = f(x)$ e depois verticalmente para o valor $f(x_1) = f(f(x)) = f^{(2)}(x)$, logo a linha se move horizontalmente para o valor $x_2 = f^{(2)}(x)$ e logo verticalmente para o valor $f(x_2) = f(f^{(2)}(x)) = f^{(3)}(x)$, e assim por diante até chegar ao valor $f(x_{N-2}) = f(f^{(N-2)}(x)) = f^{N-1}(x)$. Claramente $f^{(N-1)}(x) \rightarrow 3m$ como $N \rightarrow \infty$, então podemos concluir que nossa máquina de Atwood infinita é equivalente a apenas duas massas, m e $3m$. Finalmente pela equação (55) obtemos que

$$\frac{a}{g} = \frac{3m - m}{3m + m} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = g/2. \quad (56)$$