ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Problema da Semana: Maior Gota

São Paulo | 05 de Julho de 2024.

Problema 1 (1976-11, 382-*KBAHT*, *CCCP*)
Encontre o raio da maior gota de água que pode evaporar sem absorver calor do exterior.

Solução: Quando uma gota evapora sem absorver calor do exterior, a quantidade de calor Q necessária para a evaporação é obtida reduzindo a energia superficial da gota U_S com uma diminuição na sua área superficial.

Deixe o raio da gota diminuir em ΔR, então o volume da gota diminui em

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\left(R-\Delta R\right)^3 = 4\pi R^3\left[1-\left(1-\frac{\Delta R}{R}\right)^3\right] \tag{1}$$

Para ΔR pequenos, o segundo e terceiro termos desta igualdade podem ser desprezados em comparação com o primeiro termo, então

$$\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R. \tag{2}$$

A massa de água evaporada neste caso é igual a

$$\Delta m = \rho \Delta V = 4\pi\rho R^2 \Delta R. \tag{3}$$

Para evaporá-la, é necessária uma quantidade de calor

$$Q = L\Delta m = 4\pi L\rho R^2 \Delta R, \tag{4}$$

onde $L = 2.26 \cdot 10^6$ J/ kg é o calor específico de vaporização da água. A área de superfície da gota diminuiu em

$$\Delta S = 4\pi R^2 - 4\pi\left(R-\Delta R\right)^2 = 8\pi R\Delta R, \tag{5}$$

onde desconsideramos o termo de ordem $(\Delta R)^2$, portanto a energia superficial diminuiu em

$$\Delta U_S = \sigma \Delta S = 8\pi\sigma R\Delta R, \tag{6}$$

onde $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-2}$ J/m^2 é o coeficiente de tensão superficial da água.

Vamos igualar as expressões para Q e ΔU_S:

$$4\pi L\rho R^2\Delta R = 8\pi\sigma R\Delta R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2\sigma}{\rho L} \sim 10^{-10}\ \text{m} = 10^{-8}\ \text{cm}. \tag{7}$$

Tal queda não pode existir, pois descobrimos que R é da ordem da distância intermolecular na água. Consequentemente, nenhuma gota pode evaporar sem absorver o calor externo.

Ao resolver o problema, assumimos que a temperatura da gota e, portanto, sua energia interna não mudam. Esta alteração pode, em princípio, ser tida em conta, mas não alterará a resposta. Na verdade, a capacidade térmica específica da água é 1 cal/g·deg, e o calor específico de vaporização é 539 cal/g·deg. Consequentemente, se a temperatura da gota for a temperatura ambiente ($\sim 20°$C), então, quando ela for resfriada a 0°C, aproximadamente $\dfrac{20}{539} \approx 0.04$ da massa da gota poderá evaporar. Portanto, é claro que levar em conta a mudança na energia interna da gota não pode alterar a resposta.