ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Problema da Semana: Reação Nuclear Artificial

São Paulo | 7 de Junho de 2024.

Problema 1 (2009-04, 2136-*КВАНТ*, *Россия*)
No circuito da Fig 1, as bobinas com inductâncias L_1 e L_2 estão em curto-circuito através de um diodo ideal D. No momento inicial, a chave K está aberta e o capacitor C é carregado com a tensão φ_0. Encontre a dependência das correntes através das bobinas no tempo após o fechamento da chave K e represente essas dependências no gráfico $I(t)$.

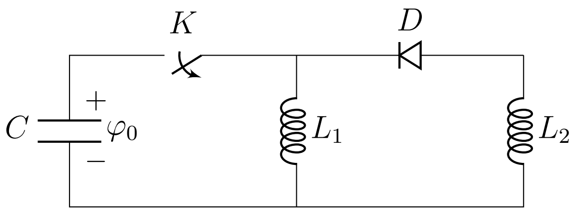

Fig 1. Circuito geral com chave aberta

Solução: Imediatamente após a chave ser fechada, o diodo ficará bloqueado. Portanto, podemos assumir que a segunda bobina está desconectada do circuito, e o circuito operacional tem o formato mostrado na Fig 2. Deixe em um momento arbitrário uma corrente I_1 fluir através da bobina com indutância L_1, e a tensão no capacitor é igual a φ. A lei de Ohm para este circuito tem a forma

$$L_1\dot{I}_1 = \varphi \quad \Rightarrow \quad L_1\ddot{I}_1 = \dot{\varphi}. \tag{1}$$

A condição de conservação de carga nos permite escrever

$$I_1 = -\dot{q} = -C\dot{\varphi} \tag{2}$$

Então utilizando as equações (1) e (2) obtemos

$$L_1\ddot{I}_1 = -\frac{I_1}{C} \quad \Rightarrow \quad \ddot{I}_1 + \omega_1^2 I_1 = 0. \tag{3}$$

Esta equação descreve oscilações harmônicas da corrente I_1 com frequência $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C}$. Procuraremos uma solução para esta equação na forma

$$I_1(t) = A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t) \tag{4}$$

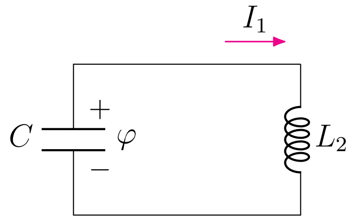

Fig 2. Circuito com diodo fechado

onde A e B são constantes que encontramos nas condições iniciais. Imediatamente após fechar a chave ($t = 0$) $I_1(0) = 0$, do qual obtemos $A = 0$. A maneira mais fácil de encontrar a constante B é usar a lei da conservação da energia. Na corrente máxima I_1 ($I_{1,\max} = B$) a tensão no capacitor é zero, então

$$\frac{L_1 B^2}{2} = \frac{C\varphi_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad B = \varphi_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}. \tag{5}$$

Então a dependência $I_1(t)$ terá a forma

$$I_1(t) = \varphi_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\sin(\omega_1 t). \tag{6}$$

A corrente através do indutor L_2 será obviamente zero até que a corrente I_1 atinja seu máximo e a tensão através do capacitor se torne zero. Isso acontecerá durante um quarto período, ou seja, intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant T_1/4$ (aqui $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{L_1 C}$ é o período de oscilação). Assim que a tensão no capacitor começar a aumentar, mas com sinal diferente, o diodo se abrirá e a corrente fluirá pela bobina de indutância L_2. O circuito de trabalho terá o formato mostrado na Fig 3. O início da contagem do tempo estará associado ao momento em que a corrente máxima for atingida pela primeira bobina Deixe em um momento arbitrário as

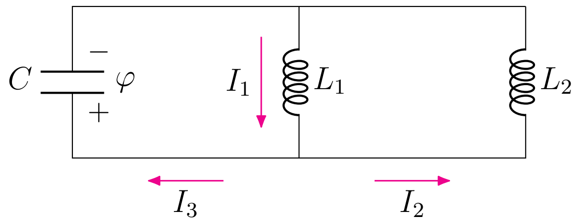

Fig 3. Circuito com diodo aberto

correntes através das bobinas serem iguais a I_1 e I_2, a corrente que flui através do capacitor é I_3 e a tensão através do capacitor é igual a φ. Vamos escrever a lei de Ohm para um circuito que cobre duas bobinas:

$$L_1\dot{I}_2 + L_2\dot{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 I_1 + L_2 I_2 = \text{const}. \tag{7}$$

Como no momento inicial selecionado $I_1(0) = \varphi_0\sqrt{C/L_1}$ e $I_2(0) = 0$, obtemos que a constante da equação (7) é $I_1(0)L_1 = \varphi_0\sqrt{L_1 C}$, então a equação pode ser escreta como

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = \varphi_0\sqrt{L_1 C}. \tag{8}$$

Agora vamos escrever a lei de Ohm para o circuito que envolve o capacitor e à bobina de indutância L_1:

$$-L_1\dot{I}_1 = \varphi. \tag{9}$$

De acordo com a lei da conservação da carga, podemos escrever

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \text{e} \quad I_3 = C\dot{\varphi}. \tag{10}$$

Do sistema das últimas quatro equações, por exclusão mútua, obtemos uma equação para a corrente I_1

$$I_1 = \frac{1}{L_2}\left(\varphi_0\sqrt{L_1C} - L_1I_1\right) - L_1C\ddot{I}_1, \tag{11}$$

ou seja que,

$$L_1C\ddot{I}_1 + \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right)I_1 = \frac{\varphi_0\sqrt{L_1C}}{L_2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{I}_1 + \frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}I_1 = \frac{\varphi_0}{L_2\sqrt{L_1C}}. \tag{12}$$

Esta equação não homogênea também descreve oscilações harmônicas da corrente I_1, mas com uma nova frequência $\omega_2 = \sqrt{(L_1+L_2)/L_1L_2C}$. A presença no lado direito da equação não de um termo zero, mas de alguma constante (independente do tempo) significa que ocorrerão oscilações harmônicas da corrente em relação não ao nível zero, mas a algum valor da corrente. Se escrevemos a equação (12) na forma

$$\ddot{I}_1 + \omega_2^2\left(I_1 - \frac{\varphi_0}{\omega_2^2L_2\sqrt{L_1C}}\right) = 0, \tag{13}$$

ou seja

$$\ddot{I}_1 + \omega_2^2\left(I_1 - \frac{\varphi_0\sqrt{L_1C}}{L_1+L_2}\right) = 0. \tag{14}$$

Então é claro que o valor médio da corrente I_1 será $\dfrac{\varphi_0\sqrt{L_1C}}{L_1+L_2}$. A solução da equação (14) tem a forma

$$I_1(t) = A\cos(\omega_2t) + B\sin(\omega_2t) + \frac{\varphi_0\sqrt{L_1C}}{L_1+L_2}. \tag{15}$$

Conhecemos que no instante inicial $I_1(0) = \varphi_0\sqrt{C/L_1}$ e $\dot{I}_1(0) = 0$ então

$$A = \varphi_0\sqrt{\frac{C}{L_1}} - \frac{\varphi_0\sqrt{L_1C}}{L_1+L_2} = \varphi_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\left(1 - \frac{L_1}{L_1+L_2}\right) = \varphi_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\left(\frac{L_2}{L_1+L_2}\right) \tag{16}$$

além de que $B = 0$.

A dependência final $I_1(t)$ terá a forma

$$I_1(t) = \varphi_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\left(\frac{L_2}{L_1+L_2}\right)\cos(\omega_2t) + \varphi_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\left(\frac{L_1}{L_1+L_2}\right). \tag{17}$$

A corrente $I_2(t)$ e dada pela expressão

$$I_2(t) = 2\varphi_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}\left(\frac{L_1}{L_1+L_2}\right)\sin^2\left(\frac{\omega_2t}{2}\right). \tag{18}$$

Lembremos que nas dependências obtidas $I_1(t)$ e $I_2(t)$ o tempo é contado a partir do momento $t = T_1/4$ após o fechamento da chave. A dependência completa (a partir do momento em que a chave é fechada) das correntes I_1 e I_2 é mostrada na Fig 4.

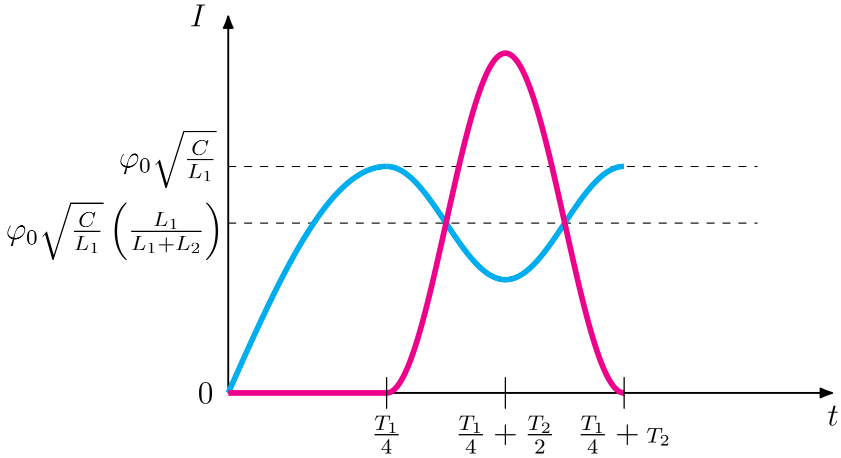

Fig 4. Gráfico das correntes: vermelho $I_2(t)$ e azul $I_1(t)$