Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Problema da Semana: Um Problema Eletromecânico

São Paulo | 19 de Julho de 2024.

Problema 1 (2024-01, 2772-*КВАНТ*, *Россия*)
A Fig 1 mostra o diagrama de um circuito elétrico composto por uma fonte com força eletromotriz $\mathscr{E}$, um capacitor de capacitância C, uma bobina de indutância L, uma chave K e um disco metálico de raio R. O disco pode girar em torno de seu eixo sem atrito. O disco está localizado em um campo magnético uniforme com vetor de indução direcionado ao longo do eixo do disco conforme mostrado na Fig 1. Quase toda a massa m do disco está concentrada em sua borda fina. A fonte é conectada ao disco em seu centro O, e o indutor é conectado ao disco por meio de um contato deslizante fixo A. A resistência ôhmica do circuito através do qual a corrente flui e a presença de indutância (além de L) nele pode ser negligenciado. Inicialmente, a chave K está aberta, o disco está imóvel, não há corrente na bobina e o capacitor não está carregado. A chave K é fechada. Determine a velocidade angular máxima do disco $\omega_{\max}$ após fechar a chave, bem como o tempo τ após fechar a chave, após o qual a velocidade angular do disco atinge primeiro o valor $\omega_{\max}$.

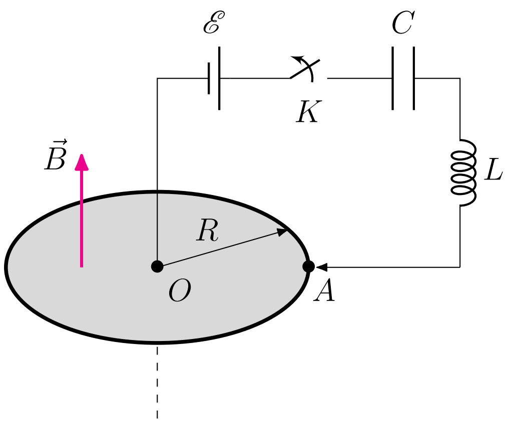

Fig 1. Esquema do circuito descrito no problema

Solução: Vamos supor que o disco gira com velocidade angular ω no sentido anti-horário. Para os portadores de carga localizados a uma distância r do eixo do disco, aparece uma velocidade coletiva ωr, perpendicular ao eixo do disco, e, consequentemente, aparece um componente idêntico (sem zerar quando somado a todos os portadores) da força de Lorentz, o que causará uma redistribuição de portadores ao longo do raio para um estado estacionário, no qual a diferença de potencial em pontos localizados a distâncias r e $r\,dr$ do eixo do disco é igual a $d\varphi = \omega Br\,dr$. Assim, a presença de um campo magnético causará uma força eletromotriz de indução igual a

$$\mathscr{E}_i = \omega B \int\limits_0^R r\,dr = \frac{\omega BR^2}{2}, \tag{1}$$

e de sinal oposto à força eletromotriz, $\mathscr{E}$, da fonte, como é indicado pela lei de Lenz.

Vamos escrever a segunda lei de Kirchhoff para o circuito de um circuito elétrico

$$\mathscr{E} + \mathscr{E}_i = L\ddot{q} + \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E} - \frac{\omega BR^2}{2} = L\ddot{q} + \frac{q}{C} \tag{2}$$

onde q é a carga do capacitor. A seguir, escrevemos a lei da variação de energia do circuito elétrico, levando em consideração que o campo magnético não realiza trabalho:

$$W_{\mathscr{E}} = \mathscr{E}\Delta q = \Delta U_C + \Delta U_L + \Delta K, \tag{3}$$

onde conhecemos que

$$\Delta U_C = \frac{q^2}{2C} \quad \text{e} \quad \Delta U_L = \frac{L\dot{q}^2}{2}, \tag{4}$$

são a variação de energia no capacitor e na bobina, respectivamente. Por outro lado

$$\Delta K = \frac{mR^2\omega^2}{2} \tag{5}$$

é a variação da energia cinética de rotação da borda do disco. Finalmente a lei de conservação da energia pode ser escrita como

$$\mathscr{E}q = \frac{q^2}{2C} + \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}. \tag{6}$$

Agora vamos diferenciar a lei de conservação da energia repeito do tempo, note que apenas q e ω apresentam dependência temporal, então

$$\mathscr{E}\dot{q} = \frac{q\dot{q}}{C} + L\dot{q}\ddot{q} + mR^2\omega\dot{\omega}. \tag{7}$$

Multiplicando a equação (2) por $\dot{q}$ e subtraindo a equação (7) dela, obtemos a seguinte relação entre $\dot{\omega}$ e $\dot{q}$:

$$\frac{BR^2\dot{q}}{2} = mR^2\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{qB}{2m}, \tag{8}$$

na ultima transição utilizamos as condições iniciais, ou seja, $q(0) = 0$ e $\omega(0) = 0$.

Assim, são possíveis três combinações de duas leis físicas, levando a uma solução para o problema.

1. A lei da indução eletromagnética e a lei da conservação da energia.

2. Equação da dinâmica do movimento rotacional e lei da indução eletromagnética.

3. Equação da dinâmica do movimento rotacional e lei da conservação da energia.

Para determinar a velocidade angular máxima, notamos que ela é alcançada no momento em que a corrente no circuito é igual a zero. Então, da lei da mudança de energia, temos

$$\mathscr{E}Q = \frac{Q^2}{2C} + \frac{mR^2\omega_{\max}^2}{2} \quad \text{onde} \quad \omega_{\max} = \frac{QB}{2m}, \tag{9}$$

ou seja que

$$\frac{2m\mathscr{E}\omega_{\max}}{B} = \frac{m\omega_{\max}^2}{2}\left(\frac{4m}{B^2C} + R^2\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_{\max} = \frac{4BC\mathscr{E}}{4m + B^2R^2C}. \tag{10}$$

Utilizemos agora as equações (2) e (8), onde

$$\mathscr{E} - \frac{\omega BR^2}{2} = \frac{2mL\ddot{\omega}}{B} + \frac{2m\omega}{BC} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\omega} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}\right)\omega = \frac{\mathscr{E}B}{2mL}. \tag{11}$$

A equação anterior mostra que ω vai evoluir harmonicamente no tempo, mas o seu valor médio será diferente de zero. A frequência cíclica das oscilações harmônicas descritas por ω será

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}}.$$

A equação (11) pode ser escrita como

$$\ddot{\omega} + \Omega^2\omega = \frac{\mathscr{E}B}{2mL} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\xi} + \Omega^2\xi = 0, \tag{12}$$

onde utilizamos a transformação $\xi = \omega - \mathscr{E}B/2mL\Omega^2$. A solução da equação (12) é do tipo

$$\omega(t) = A_1\cos(\Omega t) + A_2\sin(\Omega t) + \frac{\mathscr{E}B}{2mL\Omega^2}, \tag{13}$$

onde A_1 e A_2 são determinados pelas condições iniciais, ou seja, $\omega(0) = 0$ e $\dot{\omega}(0) = 0$.

$$A_1 = -\frac{\mathscr{E}B}{2mL\Omega^2} \quad \text{e} \quad A_2 = 0. \tag{14}$$

A lei de evolução da variável ω então é

$$\omega(t) = -\frac{\mathscr{E}B}{2mL\Omega^2}\cos(\Omega t) + \frac{\mathscr{E}B}{2mL\Omega^2} = \frac{\mathscr{E}B}{2mL\Omega^2}\sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \tag{15}$$

O valor máximo de ω é alcançado (pela primeira vez) quando

$$\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Omega\tau}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}}}. \tag{16}$$