Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Problema da Semana: Máximo Espalhamento

São Paulo | 21 de Junho de 2024.

Problema 1 (2001-01, *А. ОВЧИННИКОВ, В. ПЛИС ,КВАНТ, СССР*)
Qual é o ângulo máximo θ de espalhamento elástico de uma partícula alfa no hidrogênio? A massa de o átomo de hidrogênio é 4 vezes menor que a massa da partícula alfa.

Primeira solução: Vamos analisar uma colisão elástica em um referencial de laboratório (estacionário). Vamos introduzir a seguinte notação: m_1 é a massa da partícula alfa, $\vec{v}$ é sua velocidade antes da dispersão, m_2 é a massa do átomo de hidrogênio, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são as velocidades da partícula alfa e do átomo de hidrogênio, respectivamente, após dispersão.

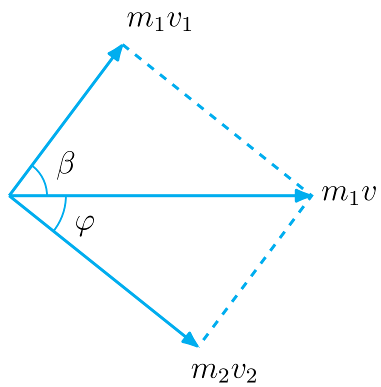

Fig 1. Esquema de vetores para solução no sistema referencial de laboratório

A interação é elástica; portanto, o momento (Fig 1) e a energia cinética do sistema partícula alfa-átomo de hidrogênio são conservados:

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos(\beta) + m_2 v_2 \cos(\varphi), \tag{1}$$

$$m_1 v_1 \sin(\beta) = m_2 v_2 \sin(\varphi), \tag{2}$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{3}$$

Excluindo o ângulo φ e a velocidade v_2 destas relações, obtemos, em relação a v_1, uma equação quadrática

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1 v \cos(\beta) v_1 + (m_1 - m_2)v^2 = 0. \tag{4}$$

As raízes desta equação serão reais sim

$$4m_1^2v^2\cos^2(\beta) - 4\left(m_1^2 - m_2^2\right) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) \leqslant \frac{m_2}{m_1}. \tag{5}$$

O ângulo máximo β que satisfaz esta condição é o ângulo desejado θ. Por isso,

$$\theta = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \approx 0.25 \text{ rad}. \tag{6}$$

Observe que o espalhamento no ângulo máximo só é possível sob a condição de que a massa da partícula incidente seja maior que a massa da partícula em repouso.

Segunda solução: No caso geral, é conveniente considerar uma colisão no sistema do centro de massa das partículas em colisão (em um sistema onde seu momento total é zero). A velocidade do centro de massa do nosso sistema de corpos é igual a

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

Antes da colisão, o momento de uma partícula de massa m_1 é igual a

$$\vec{p} = m\left(\vec{v} - \vec{V}\right) = \frac{m_1 m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2}, \tag{8}$$

e o momento de uma partícula com massa m_2 é $-\vec{p}$.

Durante uma colisão elástica, o momento e a energia do sistema de corpos em interação são conservados. Portanto, se o momento da primeira partícula após a colisão for denotado por $\vec{q}$, então o momento da segunda será $-\vec{q}$. Da lei da conservação da energia, escrita na forma

$$p^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = q^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), \tag{9}$$

então, obtemos que $p = q$.

Assim, a única coisa que acontece no sistema em consideração durante uma colisão é a rotação dos momentos da partícula, ou seja, mudando sua direção sem alterar sua magnitude. Junto com os impulsos, as velocidades de ambas as partículas também mudam. O ângulo de rotação depende da natureza específica da interação das partículas e de sua posição relativa durante a colisão.

Ao passar para o sistema de referência do laboratório, usaremos a regra para somar velocidades. A velocidade da partícula incidente após a colisão é igual a

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{u}_1, \tag{10}$$

onde $\vec{u}_1$ é sua velocidade no sistema do centro de massa. Na Fig 2 os vetores $\vec{V}$ - velocidade do centro de massa do sistema e $\vec{v}$ - velocidade da partícula incidente antes da colisão - são plotados a partir de um ponto. O valor

$$u_1 = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} \tag{11}$$

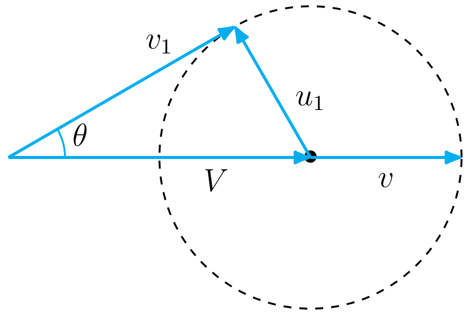

Fig 2. Esquema de vetores para solução no sistema referencial ligado ao centro de masas

determina o raio do círculo no qual termina o vetor $\vec{v}_1$. Segue-se da figura que no caso $m_1 > m_2$ o ângulo entre os vetores velocidade $\vec{v}$ e $\vec{v}_1$ da partícula incidente antes e depois da colisão não pode exceder um certo valor máximo θ, correspondendo ao caso quando $\vec{v}_1$ toca o círculo, ou seja,

$$\theta = \arcsin\left(\frac{u_1}{V}\right) = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \approx 0.25 \text{ rad.} \tag{12}$$