ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Calculo de Resistores

São Paulo | 28 de Junho de 2024.

Resumo

Estas notas foram criadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP).

O cálculo de resistências equivalentes, uma prática fundamental na eletrônica e na teoria dos circuitos, remonta ao desenvolvimento inicial da teoria das redes elétricas no século XIX. A necessidade de determinar como múltiplas resistências se comportam quando combinadas em circuitos complexos impulsionou o desenvolvimento de métodos analíticos e empíricos para encontrar valores únicos que representassem essas combinações. Tais métodos são baseados em nos princípios e leis fundamentais que descrevem o funcionamento dos circuitos elétricos, ou seja, lei de Ohm e leis de Kirchhoff (essencialmente leis de conservação de carga e energia).

Mas ..., imagine que você tem um sistema de muitos resistores conectados por fios ideais, de modo que o circuito resultante contem muitos nós e muitas malhas fechadas. Cada par de nó e malha geram duas equações que vinculam correntes e potenciais no circuito. Então se você tem n nós e m malhas, vamos ter que resolver um sistema de $n+m$ equações para conhecer como são distribuídas as correntes do circuito e os potenciais nos diferentes nós. Finalmente com essa informação poderíamos determinar a resistência equivalente do circuito.

Bom, é claro que resolver um sistema de grande número de equações com muitas incógnitas não é a melhor forma de perder o tempo (por exemplo num exame). Portanto, precisarmos de métodos que permitam encontrar rapidamente a resistência de um circuito.

Vamos inicial com algumas conexões simples de resistores, é claro que estamos falando de conexões de resistores em série e paralelo. Um conjunto R_0, R_1, R_2, $\ldots$, R_{n-1} de n resistores formam uma conexão em série quando a corrente total I que passa em cada resistor (ver Fig 1). Por definição a resistência equivalente, R_{eq} do circuito de resistores em série está relacionada com a corrente total I e a diferença de potencial nos terminais do circuito pela lei de Ohm

$$R_{eq}I = \varphi_n - \varphi_0. \tag{1}$$

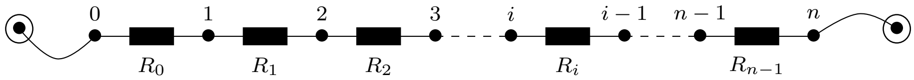


Fig 1. Conexão em série de um conjunto $\{R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}\}$ de n resistores.

A diferença de potencial nos terminais 0 e n pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}\varphi_n - \varphi_0 &= \varphi_n - \varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_0) \\ &= \varphi_n - \varphi_2 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0) \\ &= \varphi_n - \varphi_3 + (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0) \\ &= \ldots \\ &= (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \cdots + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0)\,,\end{aligned} \tag{2}$$

essencialmente a equação anterior fala que a diferença de potencial entre os terminais do circuito pode ser representada como a suma da diferença de potencial nos terminais de cada resistência. Então, utilizando as equações (1) e (2) obtemos que

$$R_{eq}I = (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \cdots + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0)\,, \tag{3}$$

finalmente dividindo ambos os membros da (3) pela corrente total do circuito, e considerando que pela lei de Ohm $\varphi_i - \varphi_{i-1} = IR_{i-1}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, obtemos

$$R_{eq} = R_{n-1} + R_{n-2} + \cdots + R_1 + R_0 = \sum_{i=0}^{n-1} R_i. \tag{4}$$

Ou seja, nosso circuito com n resistores conectados em série é equivalente a um circuito com só um resistor de valor R_{eq} dado pela equação (4).

Vamos considerar novamente o nosso conjunto de n resistores, mas agora conectados em paralelo (ver Fig 2). A condição é que cada resistor tem a mesma diferença de potencial,

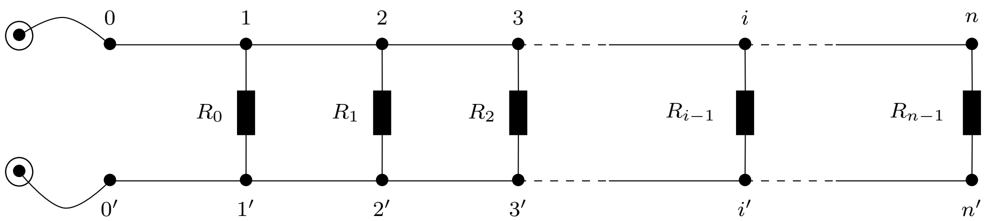


Fig 2. Conexão em paralelo de um conjunto $\{R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}\}$ de n resistores.

$\Delta\varphi$, entre o seus nós. Ou seja, temos que

$$\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_{0'} = \varphi_1 - \varphi_{1'} = \cdots = \varphi_n - \varphi_{n'}. \tag{5}$$

Pela primeira lei de Kirchhoff a corrente total I que circula entre os terminais 0 e $0'$ é igual à soma das correntes que circulam em cada resistor, ou seja temos que

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n, \tag{6}$$

logo dividindo ambos os membros da equação (6) pelo valor $\Delta\varphi$, e utilizando a lei de Ohm $R_{i-1}I_i = \varphi_i - \varphi_{i'} = \Delta\varphi$ para todo $i = 1, \ldots, n$, obtemos que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_{n-2}} + \frac{1}{R_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{R_i}. \tag{7}$$

Ou seja, nosso circuito de n resistores conectados em paralelo é equivalente a um circuito com só um resistor de valor R_{eq} dado pela equação (7).

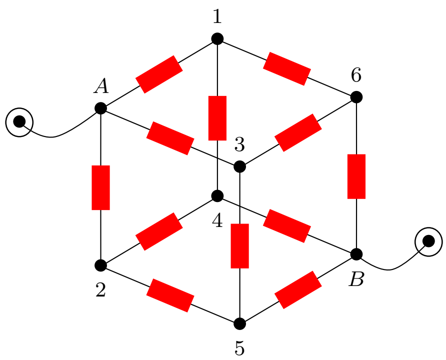
Método do nó equipotencial: A ideia do método é tratar diferentes nós de um circuito que possuem potenciais iguais como só um nó ou *super-nó*. Neste caso, o potencial no super-nó é igual ao potencial dos nós que o compõem.

Se os componentes de um super-nó em um circuito elétrico são juntados por um condutor ideal, então as condições elétricas do circuito não mudarão, pois nenhuma corrente fluirá através de este condutor.

Vejamos um par de exemplos para entender o anterior.

Exemplo 1. Encontre a resistência equivalente à seção do circuito mostrada na Fig 3-esquerda, se todas as resistências vermelhas são iguais a r.

Solução: Se conectamos os nós A e B nos terminais de uma fonte de corrente constante (entregando a corrente I) é fácil entender que os nós $1, 2$ e 3 possuem potenciais iguais. Na verdade a partir de considerações de simetria, fica claro que as correntes que fluem através dos ramos A-1, A-2 e A-3 são as mesmas e iguais a $I/3$. Portanto, devido à igualdade das resistências desses ramos, as quedas de potenciais sobre eles também são iguais.



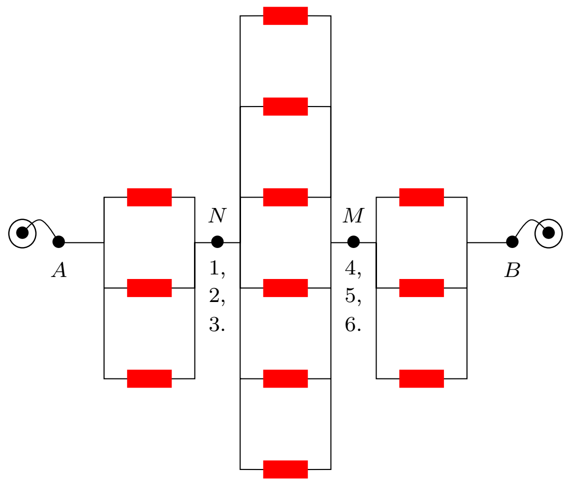


Fig 3. Circuito para o exemplo 1: esquerda conexão cúbica de resistências, direita representação plana equivalente ao cubo de resistências. Cada resistor vermelho é de valor r.

Da mesma forma, pode-se mostrar que os nós 4, 5 e 6 também possuem potenciais iguais. É claro que a resistência do circuito não mudará se os nós 1, 2 e 3 estiverem conectados entre si (super-nó N) e os nós 4, 5 e 6 também estiverem conectados entre si (super-nó M). Feito isso, obtemos um circuito equivalente, representado na Fig 3-direita. A resistência deste circuito não é difícil de encontrar se conhecemos as resistência dos ramos A-N, N-M e M-B

$$R_{eq} = R_{AN} + R_{NM} + R_{MB} \tag{8}$$

onde $R_{AN} = R_{MB} = r/3$ e $R_{NM} = r/6$. Finalmente obtemos que

$$R_{eq} = \frac{2r}{3} + \frac{r}{6} = \frac{5r}{6}. \tag{9}$$

Exemplo 2. Encontre a resistência equivalente à seção do circuito mostrada na Fig 4-esquerda, se todas as resistências vermelhas são iguais a r.

Solução: Bom..., se você achou que a resistência é a mesma que no exemplo 1, então esta errado. Se bem ainda temos um cubo de resistências, observe que queremos medir resistência equivalente entre dois nós diferentes ao exemplo anterior. Claramente se a corrente total I entregada ao circuito, digamos no nó A, então ela vai se distribuir pelos diferentes ramos do cubo de uma forma diferente a como foi distribuída no exemplo 1. Note que agora os nós 1 e 2, assim como os nós 3 e 4 pertencem a dois super-nós diferentes (pares de nós equipotenciais). Ao conectar os componentes de cada super-nó, obtemos um circuito equivalente (ver Fig 4-direita).

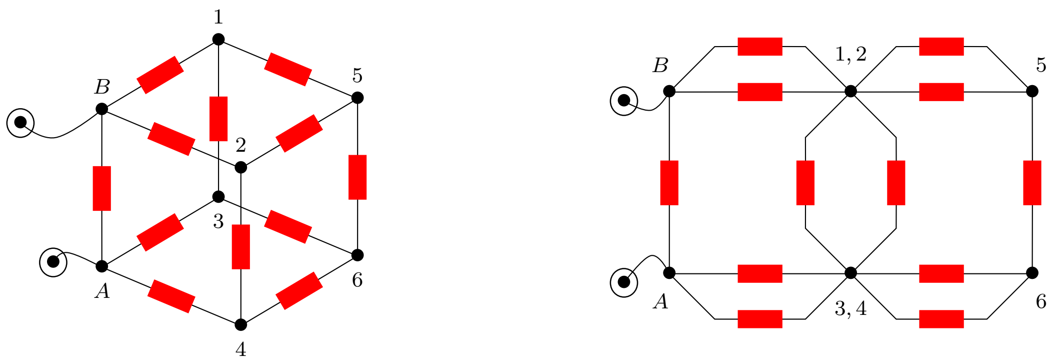


Fig 4. Circuito para o exemplo 2: esquerda conexão cúbica de resistências, direita representação plana equivalente ao cubo de resistências. Cada resistor vermelho é de valor r.

Note que a resistência equivalente no novo circuito e bem simples de achar, basta fazer algumas transformações em série e paralelo (ver Fig 5) e obteremos a resistência equivalente, $R_{A\text{-}B} = 7r/12$.

Método de exclusão de circuito: Este método está intimamente relacionado ao anterior. Se uma seção do circuito estiver conectada entre dois nós que pertencem ao mesmo super-nó (os nós são equipotenciais), essa seção pode ser excluída do circuito. Neste caso, será obtido um circuito equivalente, pois nenhuma corrente fluiu pela seção excluída. Às vezes, após eliminar uma seção, é aconselhável conectar nós equipotenciais entre si.

Vamos começar com algo muito simples.

Exemplo 3. Encontre a resistência equivalente da seção do circuito mostrado na Fig 6.

Solução: A partir de considerações de simetria, é óbvio que as correntes nos ramos A-M e A-N são iguais. Portanto, os nós M e N são equipotenciais, ou seja, eles pertencem

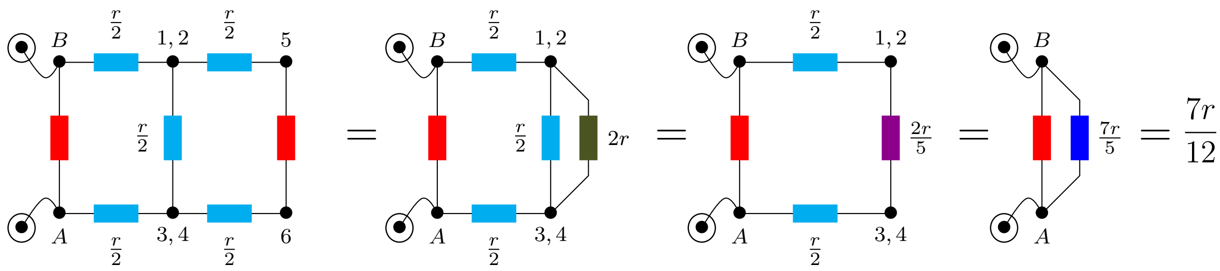


Fig 5. Transformações de equivalência que são realizadas sucessivamente no circuito da Fig 4-direita até chegar num valor de resistência equivalente

ao mesmo super-nó. Excluindo a seção M-N, pois nenhuma corrente pode fluir entre dois nós que pertencem ao mesmo super-nó, obtemos um circuito equivalente (ver Fig 6), cuja resistência equivalente é facilmente encontrada: $R_{AB} = 3r/2$.

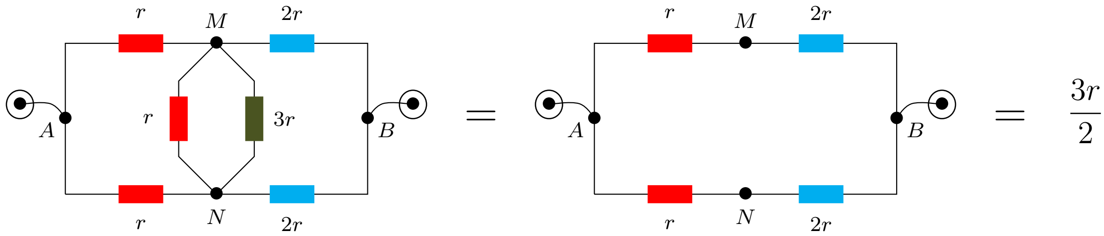


Fig 6. Circuito para o exemplo 3. Transformações equivalentes (exclusão do ramo M-N).

Exemplo 4. Encontre a resistência da seção do circuito A-B mostrada na Fig 7. Todas as resistências no diagrama são iguais a r.

Solução: Note que os nós F e F' pertencem ao mesmo super-nó (são equipotenciais) e, portanto, nenhuma corrente flui através da seção F-F'. Portanto, podemos remover a seção F-F' e obter um circuito equivalente.

Após simples transformações do circuito resultante é fácil calcular que sua resistência é $R_{AB} = 7r/6$. Em este exemplo podemos mudar o valor das resistências que formam o pentágono interno $BDFF'D'$ da estrela para outro valor (mantendo eles iguais entre si) e, o valor da resistência equivalente será outro, mas a simetria do problema permanece invariante, ou seja, podemos resolver o problema utilizando as mesmas transformações. Acontecerá alguma coisa com a solução do problema (resistência equivalente) se mudamos apenas o valor da resistência do ramo F-F'?

Método de reprodução de nós: Este método também está intimamente relacionado ao método do nó equipotencial. Se a substituição de vários nós equipotenciais por um (super-nó) levar a um circuito equivalente, então a transformação reversa de um nó por vários nós equipotenciais não violará as condições elétricas no resto do circuito.

Vamos dar exemplos de circuitos para os quais tal transformação é apropriada.

Exemplo 5. Encontre a resistência da seção do circuito mostra na Fig 8. Cada resistência vermelha tem um valor r.

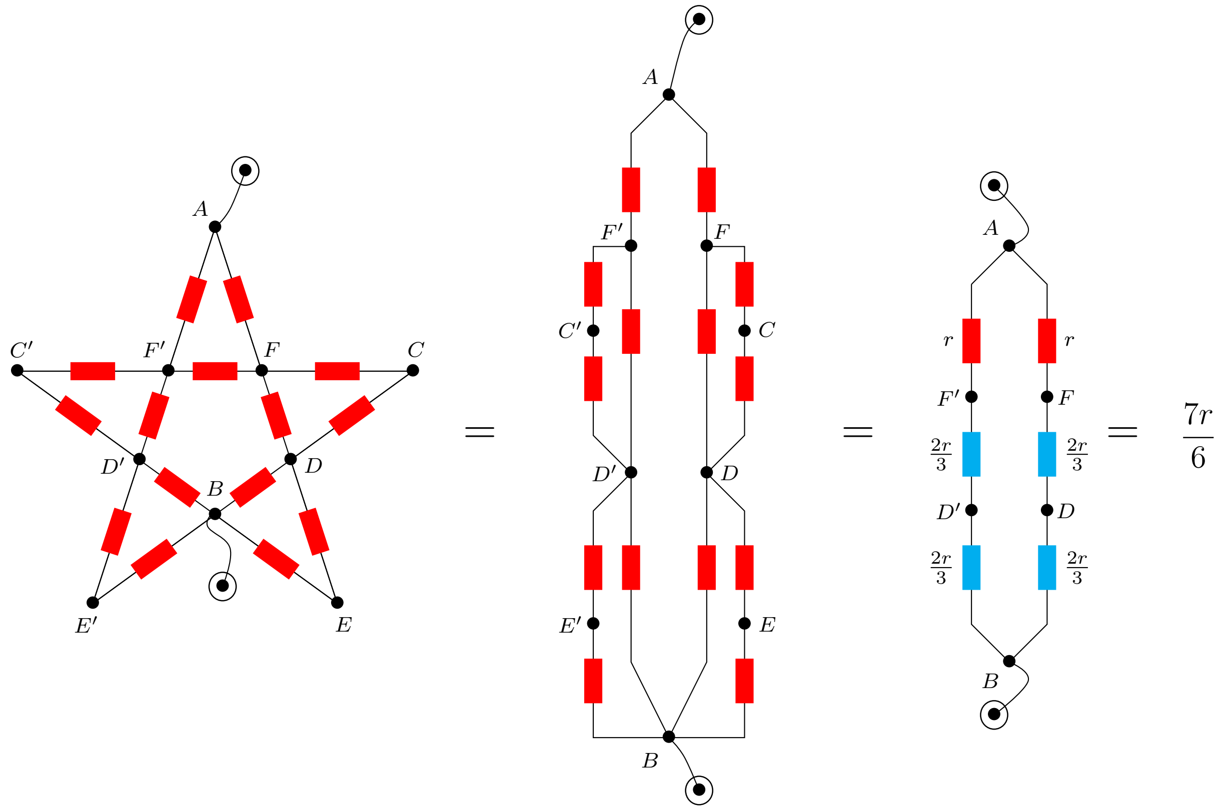


Fig 7. Circuito em estrela para o exemplo 4. Conjunto de transformações equivalentes.

Solução: Vamos substituir o nó O por três nós, O_1, O_2 e O_3. Porém, ainda precisamos provas que essas cadeias são equivalentes. Para a equivalência das cadeias é necessário que os nós O_1, O_2 e O_3 sejam equipotenciais. Mas isso é óbvio, já que a diferença de potencial $\varphi_{O_2} - \varphi_A$ é igual à metade da diferença de potencial u_{AB} entre os pontos A e B: $\varphi_{O_2} - \varphi_A = v_{AB}/2$. Também temos que $\varphi_{O_1} - \varphi_A = u_{AB}/2$ e $\varphi_{O_3} - \varphi_A = u_{AB}/2$. Por isso $\varphi_{O_1} = \varphi_{O_2} = \varphi_{O_3}$, ou seja os nós O_1, O_2 e O_3 são de fato equipotenciais, e eles pertencem ao super-nó O. Então podemos concluir a equivalência entre os dois primeiros circuitos. O passo do segundo circuito para o terceiro circuito é trivial, assim como o resto das transformações até concluir que a resistência equivalente do circuito é $R_{AB} = 4r/5$.

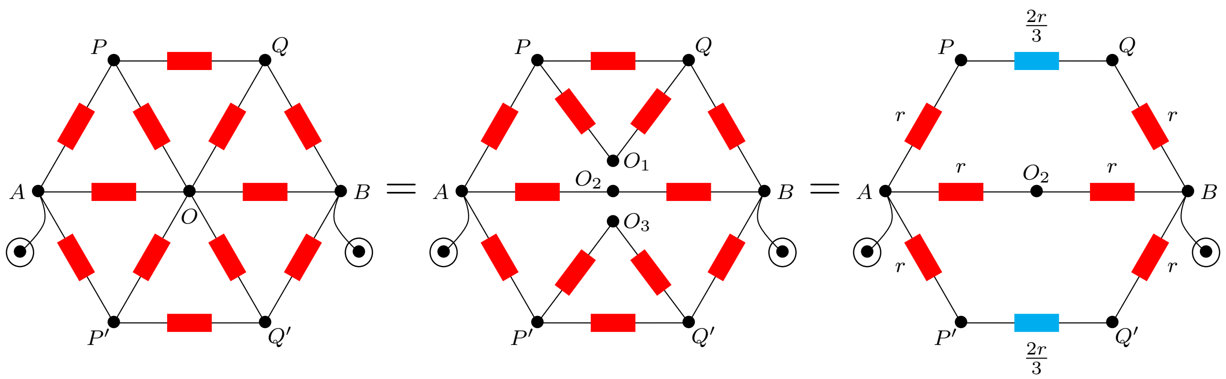


Fig 8. Circuito hexagonal para o exemplo 5. Conjunto de transformações sucessivas.

Exemplo 6. Determine a resistência equivalente da seção do circuito A-B mostrada na Fig 9. Todas as resistências vermelhas são de valor r.

Solução: Vamos "dividir" os nós P e Q em pares de nós equipotenciais P_1, P_2 e Q_1, Q_2. Agora nosso circuito é uma conexão paralela de dois circuitos idênticos, então basta considerar um deles (ver Fig 9-direita). É fácil ver que o nó P_1 e equipotencial com o nó

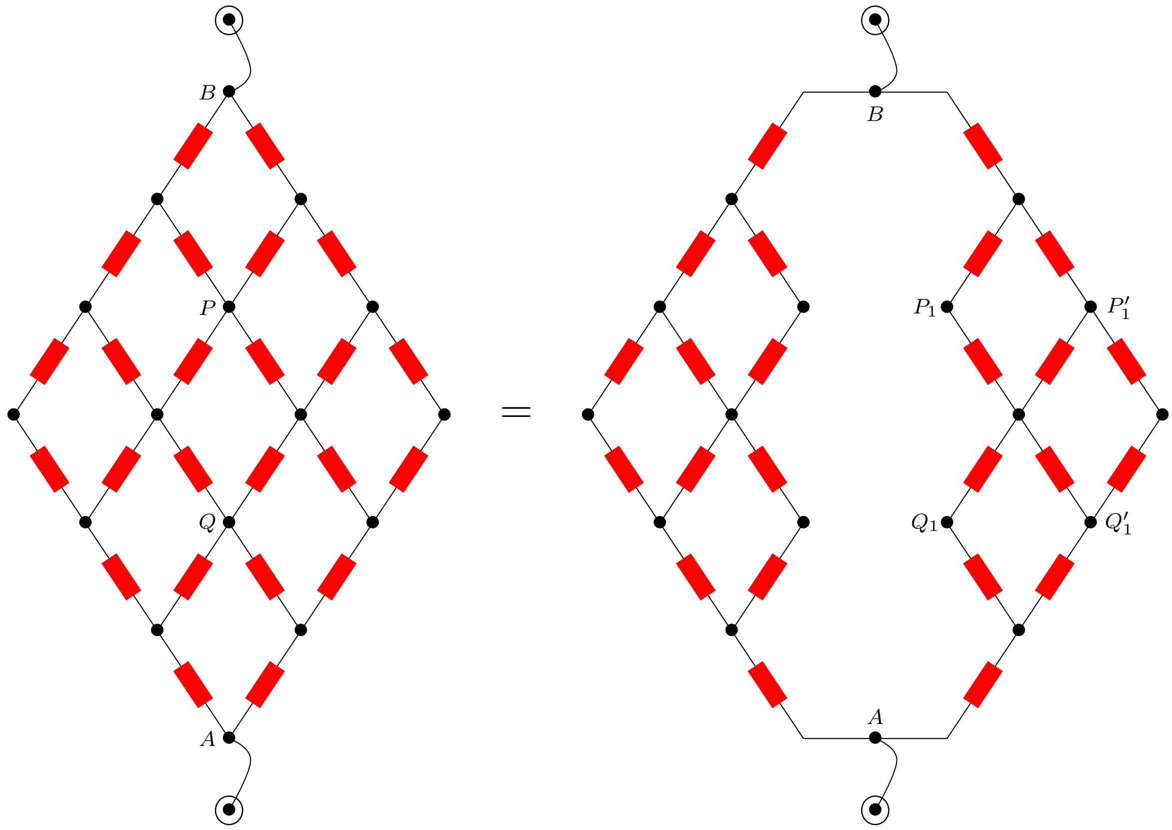


Fig 9. Circuito para o exemplo 6. Decomposição do circuito complexo original em dois ramos não tão complexos conectados em paralelo.

P_1', e que os nós Q_1 e Q_1' também são equipotenciais, portanto, eles podem ser conectados em um super-nó, logo obtemos o circuito mostrado na Fig 9. A resistência do "medio" circuito da conexão em paralelo é $11r/3$. Consequentemente, a resistência do circuito total é $R_{AB} = 11r/6$.

Método de divisão de ramificação: Sabemos que vários ramos paralelos ou sequenciais podem ser substituídos por um ramo equivalente.

O exemplo abaixo mostra que às vezes é útil aplicar essas regras na direção oposta - não para "mesclar" ramificações, mas para "dividi-las".

Exemplo 7. Encontre a resistência R do circuito mostrado na Fig 10.

Solução: Vamos substituir o ramo O-C por dois ramos paralelos com resistências iguais de $2r$. Em seguida, bifurcamos o nó C em nós equipotenciais C_1 e C_2 (sua equipotencialidade

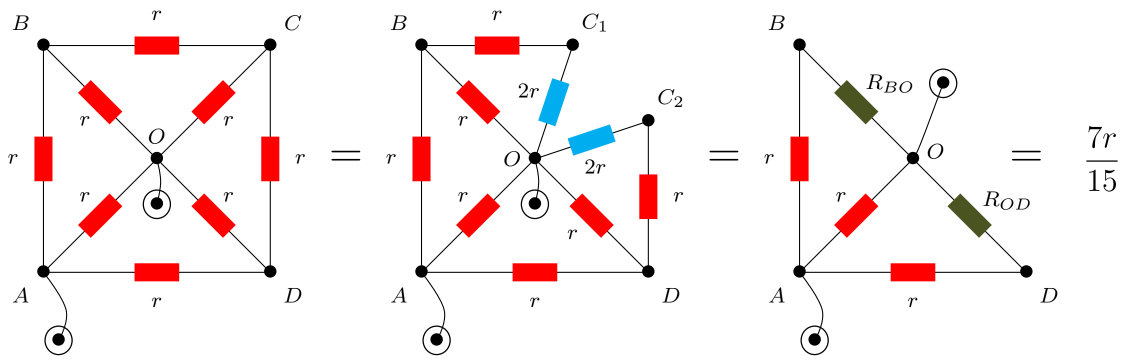


Fig 10. Figura para o Exemplo 7. Sequência de transformações do circuito.

segue de considerações de simetria em relação aos nós A e O). O circuito mostrado na segunda Fig 10, é equivalente ao circuito da primeira Fig 10. Vamos encontrar sua resistência. As seções B-O e B-C_1-O estão conectadas em paralelo. Portanto a resistência $R_{BO} = 3r/4$. Da mesma maneira $R_{OD} = 3r/4$. Agora os nós A e O estão conectados por três ramos paralelos com resistências $7r/4$, r, $7r/4$. A resistência total do circuito é $R = 7r/15$.

Bom, uma vez que o problema foi resolvido podemos tentar responder as seguintes perguntas como tarefa:

1. O que vai acontecer na resposta final se mudamos os valores das resistências das diagonais do quadrado para outro valor (mantendo todas elas iguais entre si)

2. O que vai acontecer se a mudança proposta no item anterior só é efetuada nas resistências da diagonal AC.

Conexões infinitas:

Exemplo 8. O diagrama de circuito mostrado na Fig 11 consiste em um número muito grande (infinito) de elementos. As resistências dos resistores em cada elemento subsequente diferem por um fator κ das resistências dos resistores nos elementos anteriores. Determine a resistência R_{AB} entre os pontos A e B se as resistências do primeiro elemento forem R_1 e R_2.

Solução: Segue-se de considerações de simetria que se removermos o primeiro elemento do circuito, a resistência do circuito restante entre os pontos C e D será $R_{CD} = \kappa R_{AB}$. Portanto, o circuito equivalente da cadeia infinita terá a forma mostrada na Fig 11. Aplicando a este

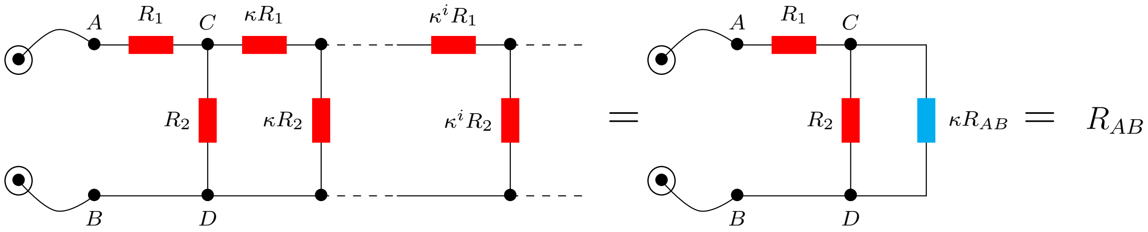


Fig 11. Circuito infinito e o circuito finito equivalente para o exemplo 8.

circuito as fórmulas para a resistência dos resistores conectados em série e em paralelo, obtemos

$$R_{AB} = R_1 + \frac{\kappa R_2 R_{AB}}{R_2 + \kappa R_{AB}} \tag{10}$$

ou seja, obtemos que

$$(R_{AB} - R_1)(R_2 + \kappa R_{AB}) = \kappa R_2 R_{AB}, \tag{11}$$

de onde

$$\kappa R_{AB}^2 + [(1-\kappa)R_2 - \kappa R_1] R_{AB} - R_1 R_2 = 0 \tag{12}$$

Vamos estudar alguns casos particulares da equação (12). Primeiramente se $\kappa = 0$, então obtemos que $R_{AB} = R_1$, onde o resistor R_2 está curto-circuitado. No caso em que $\kappa \to \infty$ teremos que $R_{AB} = R_1 + R_2$. No caso $\kappa = 1$ e $R_1 = R_2 = R$ obtemos a equação

$$R_{AB}^2 - RR_{AB} - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) R. \tag{13}$$

Olhando novamente para a equação (12), podemos notar que obviamente ela pode ter duas soluções, digamos ambas as soluções serão reais no caso

$$[(1-\kappa)R_2 - \kappa R_1]^2 + 4\kappa R_1 R_2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad [1 - \kappa(1+\alpha)]^2 + 4\kappa\alpha \geqslant 0, \tag{14}$$

onde claramente $\alpha = R_1/R_2 > 0$, então dado que $\kappa > 0$ a desigualdade anterior sempre é verdadeira. O leitor pode estudar os casos onde a desigualdade se transforma em igualdade.

Exemplo 9. Determine a resistência R_{AB} entre os pontos A e B da moldura feita de fio fino e homogêneo (ver Fig 12), assumindo que o número de triângulos equiláteros embutidos sucessivamente (com lados diminuindo pela metade) tende ao infinito. O comprimento do lado AB é igual a l, e a resistência por unidade de comprimento do fio é ρ.

Solução: Segue-se de considerações de simetria que o circuito inicial pode ser substituído por um equivalente (ver Fig 12). Substituímos o triângulo "interno"composto por um número

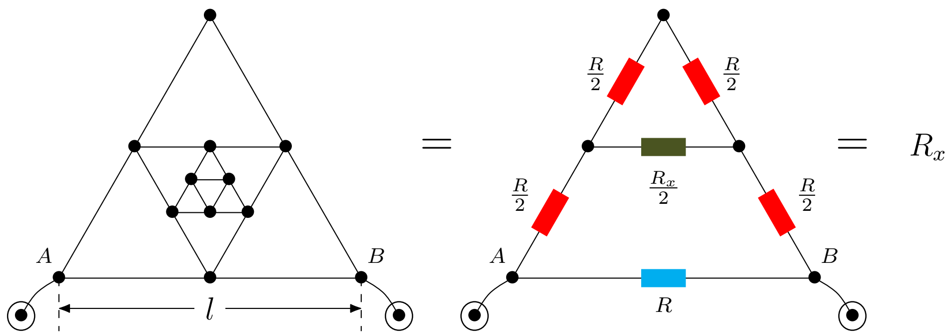


Fig 12. Circuito para o exemplo 8, conjunto de triângulos encaixados.

infinito de elementos por um resistor de resistência $R_{AB}/2$, onde a resistência $R_{AB} = R_x$, e a resistência do lado do triângulo é $R = l\rho$. Depois de algumas transformações simples obtemos que

$$R_x = \frac{R\left(R + \dfrac{RR_x/2}{R + R_x/2}\right)}{R + R + \dfrac{RR_x/2}{R + R_x/2}} = \frac{2\left(R^2 + RR_x\right)}{4R + 3R_x}, \tag{15}$$

ou seja que

$$R_x\left(4R + 3R_x\right) = 2\left(R^2 + RR_x\right) \quad \Rightarrow \quad 3R_x^2 + 2RR_x - 2R^2 = 0. \tag{16}$$

A solução da equação anterior respeito de R_x é também a solução do problema. Utilizando a solução geral da equação de segundo grau obtemos que $R_x = R(-1 \pm \sqrt{7})/3$. claramente a solução negativa não tem sentido físico, ou seja que a resistência medida entre os nós A e B será $R_{AB} = R_x = l\rho(\sqrt{7} - 1)/3$.

Finalmente vamos estudar sistemas que envolvem redes infinitas, onde podemos utilizar o principio de superposição.

Exemplo 10. Uma rede infinita de fios, com células quadradas, é mostrada abaixo na Fig 13. A resistência de cada lado da célula menor é igual a R_0. Encontre a resistência equivalente

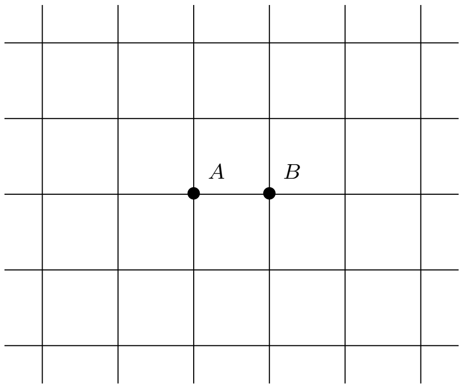


Fig 13. Rede resistiva infinita.

R, de toda a rede, entre os pontos A e B.

Solução: Vamos considerar que conectamos uma forte de corrente nos terminais A e B. Vamos fazer o seguinte experimento mental. Seja que a corrente I é entregada no nó A, e ela é distribuída na rede. Como quada célula tem um lado de resistência R_0, a distribuição é de fato isotrópica, ou seja, a corrente I é dividida no nó A em quatro correntes $I/4$. Suponha agora uma segunda situação onde a corrente I é extraída da rede no nó B. Novamente, dada a simetria do problema, é necessário que quatro correntes de intensidade $I/4$ convirjam no nó B, para conseguir extrair a corrente I dele. Utilizando o principio de superposição podemos escrever que

$$IR = R_0\frac{I}{4} + R_0\frac{I}{4} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_0}{2}. \tag{17}$$