Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Problema da Semana: Hemisférios Carregados

São Paulo | 02 de Agosto de 2024.

Problema 1

Uma esfera de raio r conduz uma carga superficial de densidade $\sigma = \vec{a} \cdot \vec{r}$, onde $\vec{a}$ é um vetor constante e $\vec{r}$ é o vetor posição de um ponto da esfera em relação ao seu centro. Encontre o vetor campo elétrico no centro da esfera.

Solução: Vamos utilizar um sistema de eixos coordenados onde o eixo Ox é dirigido na mesma direção que o vetor $\vec{a}$ (ver Fig 1). Conhecemos que $\sigma = \vec{a} \cdot \vec{r} = ar\cos(\alpha)$. O valor de $\cos(\alpha)$ é negativo no hemisfério esquerdo da esfera e positivo no hemisfério direito da esfera, tal e como é mostrado na Fig 1. Então a esfera pode ser dividida em dois hemisférios, um de densidade de carga positiva e outro de densidade de carga negativa, por considerações de simetria os campos elétricos de ambos os hemisférios é o mesmo, ou seja que

$$\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-} = 2\vec{E}_{+}$$

Vamos achar o campo elétrico ΔE_{+} no centro da esfera (ponto O) que é criado anel fino cortado da esfera por planos paralelos distando $\Delta l \ll r$ um do outro. A área de superfície deste anel é igual a

$$\Delta S = 2\pi r \sin(\alpha) \cdot \frac{\Delta l}{\sin(\alpha)} = 2\pi r \Delta l.$$

A carga do anel considerado é

$$\Delta Q = \sigma \Delta S = ar\cos(\alpha) 2\pi r \Delta l,$$

note que $\cos(\alpha) = l/r$, então a expressão carga do anel tem a forma

$$\Delta Q = 2\pi a r l \Delta l.$$

O campo elétrico ΔE_{+}, criado pelo anel tem a forma

$$\Delta E_{+} = \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l}{r^3} = \frac{al^2}{2\varepsilon_0 r^2}\Delta l.$$

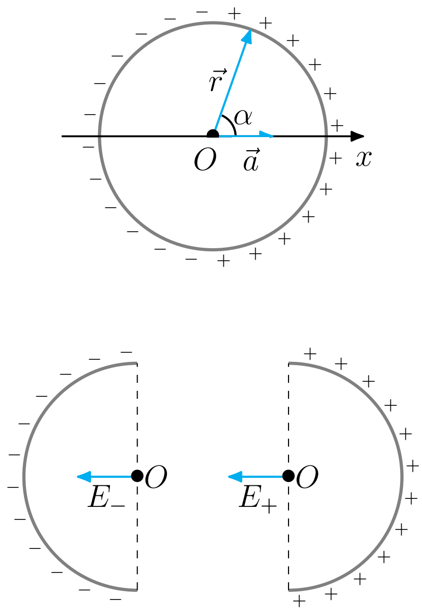

Fig 1. Esquema de hemisférios para solução do problema

É claro que o campo E_+ criado pelo hemisfério com densidade de carga positiva pode ser calculado como

$$E_+ = \sum \Delta E_+ = \frac{a}{2\varepsilon_0 r^2} \sum l^2 \Delta l.$$

Como o valor de l para o hemisfério com densidade de carga positiva varia de 0 a r, então temos que

$$\sum l^2 \Delta l = \frac{r^3}{3} \quad \Rightarrow \quad E_+ = \frac{ar}{6\varepsilon_0}.$$

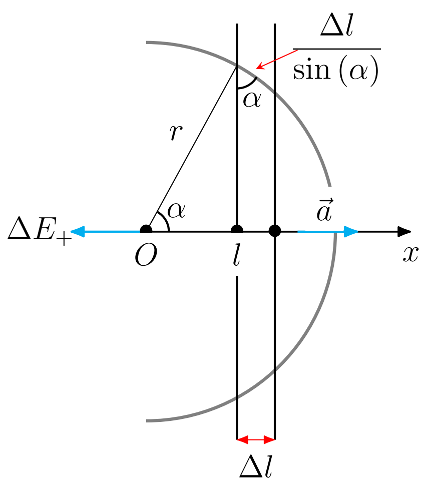

Fig 2. Decomposição de um hemisfério em anéis carregados

O vetor unitário (versor) na direção do campo elétrico $\vec{E}_+$ é $-\vec{a}/a$, então o vetor campo elétrico pode ser escrito como

$$\vec{E}_+ = E_+ \cdot \left(-\frac{\vec{a}}{a}\right) = -\frac{ar}{6\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{a}}{a} = -\frac{\vec{a}r}{6\varepsilon_0}.$$

Finalmente achamos o campo elétrico total no centro da esfera

$$\vec{E} = -\frac{\vec{a}r}{3\varepsilon_0}.$$