

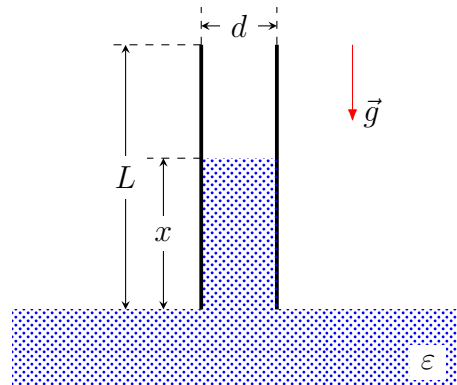
## Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

### Problema da Semana: Capacitor e Líquido Dielétrico

São Paulo | 09 de Agosto de 2024.

#### Problema 1

Um capacitor plano está parcialmente imerso em um recipiente largo contendo líquido. O capacitor é conectado a uma bateria, que mantém nas placas do capacitor uma diferença de potencial constante  $U$ . A distância entre as placas é  $d$ , a densidade do líquido é  $\rho$  e a constante dielétrica é  $\varepsilon$ . Até que altura o líquido subirá no condensador? Despreze a tensão superficial.



**Fig 1.** Esquema de capacitor e líquido dielétrico.

*Solução:* Vamos denotar a altura da subida do líquido por  $x$ , a altura das placas por  $L$  e o tamanho das placas na direção perpendicular à Fig 1 por  $a$ . A ideia de resolver o problema é a seguinte: anotamos a energia total do nosso sistema, que é função de  $x$ , e depois examinamos o mínimo na variável  $x$ . É óbvio que em algum  $x$  a energia do sistema será mínima e a derivada da energia em relação a  $x$  será zero. Esta será a altura constante da subida do líquido.

Primeiro, vamos encontrar a capacitância do nosso capacitor quando o líquido atinge uma altura  $x$ . Temos um sistema de dois capacitores paralelos, então a capacitância total é igual à soma deles:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon x a}{d} + \frac{\varepsilon_0 (L - x) a}{d} = \frac{\varepsilon_0 a}{d} [x(\varepsilon - 1) + L]. \quad (1)$$

A energia elétrica armazenada no capacitor é igual a

$$W_1 = \frac{CU^2}{2} \quad (2)$$

A energia potencial de um líquido elevado no nível zero, medida a partir do nível do líquido no recipiente, é

$$W_2 = \frac{ad\rho gx^2}{2}. \quad (3)$$

A energia armazenada na bateria pode ser escrita como

$$W_3 = W_0 - QU = W_0 - CU^2, \quad (4)$$

onde  $W_0$  é a reserva total de energia da bateria e  $CU^2$  é a energia consumida da bateria, ou seja, o trabalho realizado pela bateria carregando o capacitor até a tensão  $U$ . A energia total do nosso sistema é  $W = W_1 + W_2 + W_3$ , ou seja:

$$W = \frac{ad\rho gx^2}{2} - \frac{CU^2}{2} + W_0. \quad (5)$$

Substituindo a expressão por capacidade aqui, obtemos

$$W = \frac{ad\rho gx^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 a U^2}{2d} [x(\varepsilon - 1) + L] + W_0. \quad (6)$$

Vamos achar o mínimo desta expressão em relação a  $x$ , ou seja o mínimo da energia que deve corresponder a um equilíbrio estável:

$$x_{\min} = - \left[ - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)aU^2}{2d} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{ad\rho g}, \quad (7)$$

finalmente, a partir daqui encontramos a altura da subida do líquido:

$$x_{\min} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2\rho g} \left( \frac{U}{d} \right)^2. \quad (8)$$