

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Problema da Semana: Interação de Correntes Paralelas

São Paulo | 14 de Agosto de 2024.

Problema 1

Dois fios longos com resistência desprezível são conectados em suas extremidades por um resistor R e nas outras extremidades são conectados a uma fonte de voltagem constante. O raio da seção transversal de cada fio é menor que a distância entre seus eixos por um fator $\eta = 20$. Encontre o valor da resistência R na qual a força resultante da interação entre os fios desaparece.

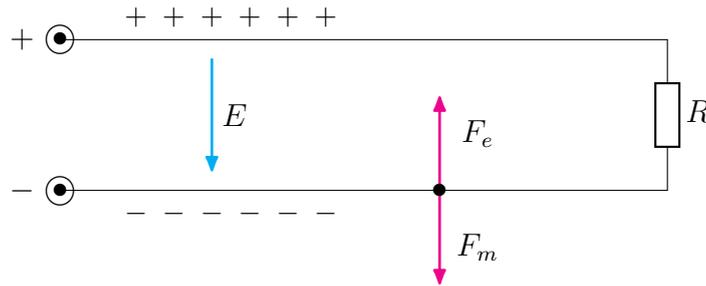


Fig 1. Circuito de fios muito comprido conectados pela resistência R

Solução: Cada fio tem excesso de cargas superficiais (independentemente de a corrente estar ou não passando por eles) (ver Fig 1). Portanto, além da força magnética F_m , devemos considerar a força elétrica F_e . Suponha que um excesso de carga λ corresponda à unidade de comprimento da escrita. Então, a força elétrica exercida por unidade de comprimento do fio pelo outro fio pode ser encontrada com a ajuda do teorema de Gauss:

$$F_e = \lambda E = \lambda \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{l} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 l}, \quad (1)$$

onde l é a distância entre os eixos dos fios. A força magnética na unidade de comprimento do fios pode ser determinada com a ajuda do teorema de circulação do vetor indução magnética

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I^2}{l}, \quad (2)$$

onde I é a corrente que circula nos fios.

Deve-se notar que as duas forças, elétrica e magnética, são direcionadas de forma oposta. A força elétrica é responsável pela atração entre os fios, enquanto a força magnética causa sua repulsão. A relação das forças é

$$\frac{F_m}{F_e} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{I^2}{\lambda^2}. \quad (3)$$

Note que pela lei de Ohm temos que a corrente é $I = \Delta\varphi/R$, onde $\Delta\varphi$ é a diferença de potencial eletrostático entre os fios, então temos que $I/\lambda = \Delta\varphi/R\lambda = 1/CR$, onde C é a capacitância na unidade de comprimento de um capacitor formado por dois fios infinitos.

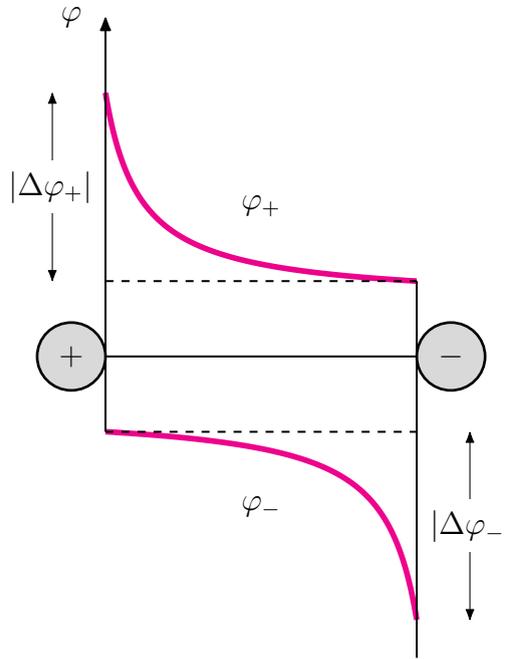


Fig 2. Capacitor composto por dois fios compridos. As linhas vermelhas mostram o potencial criado por cada um dos fios.

Segue da Fig 2 mostrando as dependências dos potenciais φ_+ e φ_- na distância entre as placas (fios) que a diferença de potencial procurada é

$$\Delta\varphi = |\Delta\varphi_+| + |\Delta\varphi_-| = 2|\Delta\varphi_+|. \quad (4)$$

A intensidade do campo elétrico criado por um dos fios a uma distância x de seu eixo pode ser facilmente encontrada com a ajuda do teorema de Gauss

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}, \quad (5)$$

então podemos escrever que

$$|\Delta\varphi_+| = \int_a^{b-a} E dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^{b-a} \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right), \quad (6)$$

onde a é o raio da seção transversal dos fios e b é a separação entre os eixos dos fios. Finalmente obtemos que

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) \Rightarrow C = \frac{\lambda}{\Delta\varphi} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b-a}{a}\right)}. \quad (7)$$

Considerando que $b \gg a$ obtemos que

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(\eta)}, \quad (8)$$

então podemos escrever que

$$\frac{F_m}{F_e} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\ln^2(\eta)}{\pi^2\varepsilon_0^2 R^2} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{\ln^2(\eta)}{\pi^2 R^2}. \quad (9)$$

A força resultante da interação desaparece quando essa razão é igual à unidade. Isso é possível quando $R = R_0$, onde

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\ln(\eta)}{\pi} = 360 \, \Omega. \quad (10)$$

Se $R < R_0$ então $F_m > F_e$, e os fios se repelem. Se, ao contrário, $R > R_0$, $F_m < F_e$, e os fios se atraem. Isso pode ser observado experimentalmente.

Assim, a afirmação de que fios condutores de corrente se atraem é verdadeira somente no caso em que o componente elétrico da interação pode ser negligenciado, ou seja, para uma resistência R suficientemente pequena no circuito mostrado na Fig 1.

Além disso, medindo a força de interação entre os fios (que é sempre resultante), geralmente não podemos determinar a corrente I . Isso deve ser levado em consideração para evitar confusão.