ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Problema da Semana: Lâmpada Elétrica

São Paulo | 23 de Agosto de 2024.

Problema 1 (1991-05, 1272-*КВАНТ*, *Россия*)
Uma lâmpada elétrica está ligada a uma rede de $\omega = 60$ Hz em série com uma bobina cuja indutância é $L = 1$ H. Um capacitor de capacidade desconhecida foi conectado em paralelo à lâmpada e descobriu-se que a lâmpada queimava com o mesmo brilho que sem o capacitor. Determine sua capacidade.

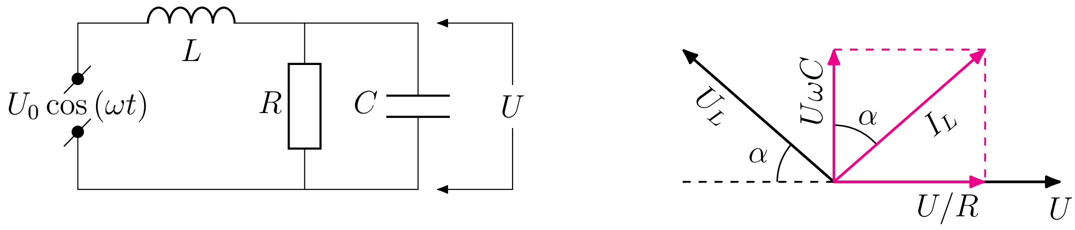

Fig 1. Circuito de corrente alternada na esquerda. Diagrama de fasores para o circuito na direita.

Solução: Quando um capacitor é conectado em paralelo com uma lâmpada, a corrente da lâmpada pode aumentar ou diminuir, dependendo da capacitância do capacitor.

Denotemos U_0 a tensão na rede e U a tensão na lâmpada (ver Fig 1-esquerda). Vamos desenhar um diagrama vetorial para este circuito. Vamos começar com a tensão na lâmpada (e no capacitor) U (ver Fig 1-direita). A corrente através da bobina I_L é igual à soma das correntes da lâmpada e do capacitor:

$$I_L = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + (U\omega C)^2} \quad \text{e} \quad \cos(\alpha) = \frac{U\omega C}{I_L}. \tag{1}$$

A tensão na bobina está à frente da corrente nela em $\pi/2$, e seus valores estão relacionados pela relação $U_L = \omega L I_L$. Vamos encontrar na Fig 1-direita a soma das tensões U e U_L e igualá-la a U_0:

$$[U - U_L \cos(\alpha)]^2 + [U_L \sin(\alpha)] = U_0^2, \tag{2}$$

ou seja que

$$U^2 + U_L^2 - 2UU_L \cos(\alpha) = U_0^2. \tag{3}$$

Substituindo as expressões correspondentes por I_L, U_L e $\cos(\alpha)$ obtemos que

$$U^2 + \omega^2 L^2 \left[\left(\frac{U}{R} \right)^2 + (U\omega C)^2 \right] - 2U^2\omega^2 LC = U_0^2. \tag{4}$$

Finalmente obtemos que

$$U = \frac{U_0 R}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2 + \omega^4 L^2 C^2 R^2 - 2\omega LCR^2}}. \tag{5}$$

pela condição do problema temos que o valor de U não muda quando o capacitor esta desconectado, o seja

$$U = \frac{U_0 R}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}. \tag{6}$$

Igualando as expressões anteriores obtemos que $\omega^4 L^2 C^2 R^2 - 2\omega LCR^2 = 0$, o que implica que a capacitância do capacitor é $C = 2/\left(\omega^2 L\right) = 20\ \mu\text{F}$.