Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Problema da Semana: Lei de Coulomb Modificada

São Paulo | 26 de Julho de 2024.

Problema 1

Suponhamos que a lei da interação de duas cargas seja um pouco diferente da lei de Coulomb e tenha a forma

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^{2-\beta}}$$

onde $|\beta| \ll 1$, e $\varepsilon_0 > 0$ é o coeficiente dimensional. Considere uma esfera de raio R, sobre a superfície da qual está uniformemente distribuída carga Q. Encontre o período de pequenas oscilações de uma partícula de massa m com carga q próxima ao centro desta esfera.

Solução: Deixe a partícula se mover uma pequena distância $r \ll R$ na direção do eixo Ox, cuja origem está no centro da esfera (ver Fig 1). Vamos encontrar a força ΔF agindo sobre esta partícula na lateral de um anel fino cortado da esfera por planos paralelos distando $\Delta l \ll R$ um do outro. A área de superfície deste anel é igual a

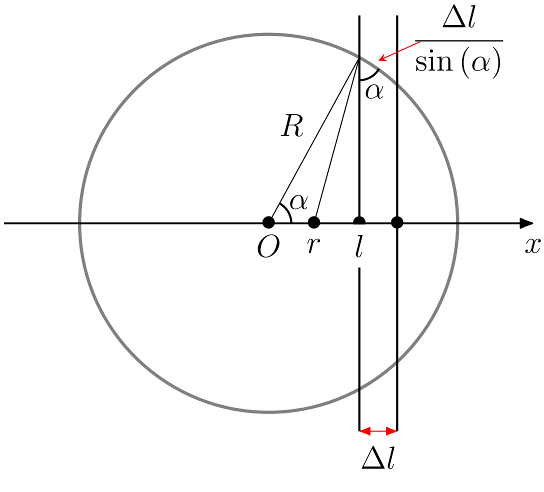

Fig 1. Esquema para solução do problema.

$$\Delta S = 2\pi R \sin(\beta) \cdot \frac{\Delta l}{\sin(\beta)} = 2\pi R \Delta l, \tag{1}$$

sua carga

$$\Delta Q = Q\frac{\Delta S}{4\pi R^2} = Q\frac{\Delta l}{2R}. \tag{2}$$

A partir da lei da interação das cargas e do princípio da superposição dado na definição do problema, descobrimos que a força ΔF é direcionada paralelamente ao eixo Ox e é igual a

$$\Delta F = -\frac{q\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l-r}{\left[R^2 - l^2 + (l-r)^2\right]^{\frac{3-\beta}{2}}}, \tag{3}$$

ou seja, pela equação (2) obtemos

$$\Delta F = -\frac{qQ\Delta l}{8\pi\varepsilon_0 R}(l-r)(R^2 - 2lr + r^2)^{\frac{\beta-3}{2}}. \tag{4}$$

Como temos que $r \ll R$, então

$$\Delta F = -\frac{qQ\Delta l}{8\pi\varepsilon_0 R^{4-\beta}}(l-r)\left(1 - \frac{2lr}{R^2}\right)^{\frac{\beta-3}{2}}, \tag{5}$$

ou seja

$$\Delta F = -\frac{qQ\Delta l}{8\pi\varepsilon_0 R^{4-\beta}}(l-r)\left[1 - (\beta-3)\frac{lr}{R^2}\right], \tag{6}$$

finalmente descartando o termo com r^2 por insignificante obtemos

$$\Delta F = -\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^{4-\beta}}\left[l - r - (\beta-3)\frac{l^2 r}{R^2}\right]\Delta l.$$

Como o valor de l varia de $-R$ a R, então

$$\sum \Delta l = 2R, \qquad \sum l\Delta l = 0 \quad \text{e} \quad \sum l^2\Delta l = \frac{2}{3}R^3. \tag{7}$$

Portanto, a força total que atua sobre a carga é igual a

$$F = \sum \Delta F = \frac{\beta qQ}{12\pi\varepsilon_0 R^{4-\beta}} r \tag{8}$$

Assim, para $r \ll R$ a força $F \sim r$. Quando $\beta qQ < 0$, esta força é restauradora, ou seja, a partícula se comportará como uma carga sobre uma mola com rigidez $k = \dfrac{|\beta qQ|}{12\pi\varepsilon_0 R^{3-\beta}}$ e realizará pequenas oscilações com período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{3m\pi\varepsilon_0 R^{3-\beta}}{|\beta qQ|}}, \tag{9}$$

próximo ao centro da esfera.

Para $\beta qQ > 0$, a força F que surge quando a partícula é deslocada tenderá a afastá-la ainda mais do centro da esfera. Portanto, nesta condição, o estado de equilíbrio da partícula carregada no centro da esfera será instável. Finalmente, em $\beta = 0$, que corresponde à lei de Coulomb, a força F dentro de uma esfera uniformemente carregada sobre a superfície desaparecerá. Neste caso, a partícula em qualquer lugar dentro da esfera estará em estado de equilíbrio.