



Minicurso para Estudantes de Ensino Médio.

Elementos de Circuitos Elétricos: Temas Seletos

São Paulo | 18 de Junho de 2024.

Conteúdo

1	Capacitores	2
1.1	Conexões de capacitores.	5
1.2	Métodos para calcular capacitâncias equivalentes	9
1.3	Carregando Capacitores	11
1.3.1	Máxima tensão	12
2	Métodos para calcular resistências equivalentes	15
2.1	Método do nó equipotencial	16
2.2	Método de exclusão de circuito	18
2.3	Método de reprodução de nós	20
2.4	Método de divisão de ramificação	21
2.5	Conexões infinitas	22
3	Circuitos não padronizados	25
3.1	Circuitos LC clássicos	25
3.2	Capacitores com fuga de carga	29
3.3	Circuitos complexos	31
3.3.1	Diodo num circuito oscilante	31
3.3.2	Oscilações não sinusoidais	35

1 Capacitores

Vamos dedicar a primeira parte das notas ao estudo dos capacitores, especificamente dos capacitores plano-paralelos. Então é razoável entender o qual é o aspecto de um capacitor plano-paralelo.

Definição 1. Um capacitor plano-paralelo é um dispositivo composto por duas placas metálicas, uniformemente carregadas, com cargas iguais, mas com sinais opostos. As placas são dispostas de modo que uma fique paralela à outra, de modo que $l \ll \sqrt{S}$, onde l é a distância entre elas e S a área das mesmas.

Em situações não ideais, como quando há fuga de carga ou falhas no dielétrico, pode haver diferenças temporárias nas cargas das placas. Além disso, em capacitores assimétricos ou em circuitos complexos, pode-se observar uma distribuição de carga desigual devido a outros fatores externos.

Definição 2. A principal característica de um capacitor é sua capacidade ou capacitância C , que é definida como o quociente entre a carga q das placas e a diferença de potencial $\Delta\varphi$ existente entre elas, ou seja,

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}.$$

A unidade de capacidade é o Farad F, embora submúltiplos desta unidade sejam normalmente usados, como o microfarad, $\mu\text{F} = 10^{-6}$ F, e o picofarad, $\text{pF} = 10^{-12}$ F.

Vamos achar então a capacitância de um capacitor plano-paralelo. A Fig 1 mostra as duas placas que formam o capacitor.

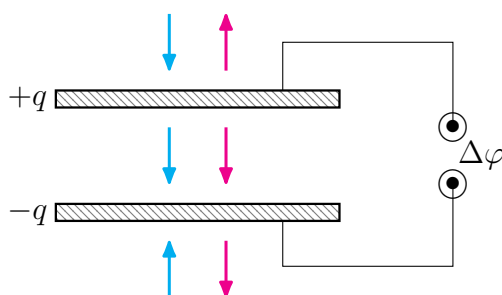


Fig 1. Capacitor plano-paralelo. O campo eletrostático criado pela carga $+q$ é representado pelos vetores azules, o campo criado pela carga $-q$ pelos vetores vermelhos.

O campo eletrostático criado pela placa de carga $+q$, coincide com o campo criado por um plano infinito carregado com a densidade de carga superficial $\sigma = q/S$, e é igual à $E_+ = \sigma/2\varepsilon_0$, onde ε_0 é a constante de permissividade dielétrica do vácuo. O vetor \vec{E}_+ está sempre saindo da placa positiva, além de ser perpendicular a ela (vetor vermelho da Fig 1). No caso da placa de carga $-q$ teremos uma situação similar, mas neste caso o vetor \vec{E}_- do campo elétrico criado pela placa sempre está entrando nela (vetor azul da Fig 1). Pelo princípio da superposição podemos concluir que o campo elétrico no espaço entre as placas do capacitor é

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q\hat{l}}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q\hat{l}}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q\hat{l}}{\varepsilon_0 S}, \quad (1)$$

onde \hat{l} é um vetor unitário ($|\hat{l}| = 1$) orientado da placa positiva até a negativa.

Nota 1. O calculo do campo criado pelas placas do capacitor foi omitido nestas notas. Vamos simplesmente usar este resultado como já conhecido. Tal resultado pode ser facilmente deduzido do teorema de Gauss, ou com um pouco mais de complexidade dividindo a placa em pequenas cargas Δq que podem ser consideradas pontuais e em virtude do princípio da superposição somar os campos criados por cada uma dessas cargas.

Agora que conhecemos o campo no interior do capacitor, é claro que a diferença de potencial eletrostático das placas $\Delta\varphi$ está relacionada ao campo pela formula

$$\Delta\varphi = El = \frac{ql}{\varepsilon_0 S}, \quad (2)$$

então a capacitância do capacitor plano-paralelo é

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 S}{l}. \quad (3)$$

A equação (3) indica que a capacitância do capacitor plano-paralelo depende de dois fatores principais, o primeiro é a geometria do capacitor e o segundo, embora seja menos evidente, é o material que preenche o volume do capacitor. Quando o material que preenche o volume do capacitor é o ar, o qual tem permitividade $\varepsilon = 1$, obtemos uma expressão para C similar com a equação (3). Quando o material é algum isolante (ou dielétrico) com permitividade $\varepsilon > 1$, a formula da capacitância adota a forma

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l} \quad (4)$$

Nota 2. Os dielétricos não serão estudados neste minicurso, então vamos focar nosso estudo na equação (3).

Em geral os capacitores são utilizados para armazenar energia em forma de campo elétrico. Mas o que isso realmente significa?

Seja que numa região do espaço de volume V existe um campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$, então a densidade de energia do campo é definida como

$$w(r) = \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r})}{2}, \quad (5)$$

então a energia armazenada no volume analisado sera

$$U = \int_V w(r') dV'. \quad (6)$$

No caso do capacitor plano-paralelo temos que $V = Sl$ e $E(\vec{r}) = ql/\varepsilon_0 S$, obtemos que

$$U_C = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \left(\frac{ql}{\varepsilon_0 S} \right)^2 dV' = \frac{q^2 l^2}{2\varepsilon_0 S^2} \int_V dV' = \frac{q^2 l^3}{2\varepsilon_0 S}. \quad (7)$$

Evidentemente a energia do capacitor plano-paralelo pode ser escrita também como

$$U_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2}. \quad (8)$$

A demonstração das diferentes expressões para o calculo da energia do capacitor ficam como exercício para o leitor.

Agora vamos analisar alguns exemplo.

Exemplo 1.1. Quatro placas de metal idênticas estão localizadas no ar a distâncias iguais l , uma das outras. A área de cada placa é igual a S . Encontre a capacitância do sistema entre os pontos A e B , considerando que as placas estão interconectadas como mostra na Fig 2.

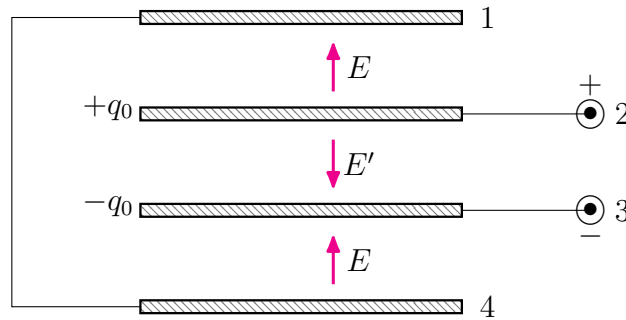


Fig 2. Esquema de placas metálicas para solução do exemplo 1.1.

Solução: Neste problema as placas 1 e 4 estão conectadas por um fio condutor, então é evidente que $\varphi_1 = \varphi_4$, já que todo o sistema pode ser considerado como um condutor único. Seja que as cargas das placas 2 e 3 são $q_2 = q_0$ e $q_3 = -q_0$, então nas placas 1 e 4 serão induzidas as cargas $q_1 = -q$ e $q_4 = q$ (note que estamos utilizando o fato que $q_1 + q_2 = 0$).

Neste caso temos que

$$E'l = \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3,$$

além de que

$$\varphi_1 - \varphi_4 = 0 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_4),$$

ou seja

$$0 = -El + \Delta\varphi - El \Rightarrow E = \frac{\Delta\varphi}{2l}.$$

Utilizando as equações anteriores é simples notar que $2E = E'$ Neste problemas temos que $E' = (q_0 - q)/\varepsilon_0 S$ e também que $E = q/\varepsilon_0 S$, então pela relação dos campos obtemos que $2q = q_0 - q$, ou seja que $q = q_0/3$. Finalmente obtemos que

$$\frac{q_0}{3\varepsilon_0 S} = \frac{\Delta\varphi}{2l} \Rightarrow C_{23} = \frac{q_0}{\Delta\varphi} = \frac{3\varepsilon_0 S}{2l}.$$

Outra situação interessante é a introdução de uma placa metálica no interior de um capacitor. É bem conhecido que o campo elétrico no interior de um condutor é nulo, o que, pelo teorema de Gauss implica que a carga de um condutor está situada apenas na sua superfície. Vamos analisar o seguinte exemplo

Exemplo 1.2. A área das armaduras de um capacitor plano é S e a distância entre elas é d . Como será modificada a capacidade do capacitor se, como é mostrado na Fig 3, uma placa metálica de espessura $d/3$ for colocada entre suas armaduras?

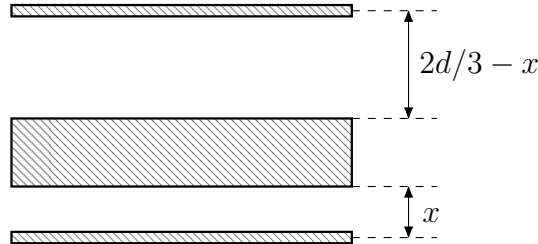


Fig 3. Esquema de capacitor e condutor entre as armaduras para solução do exemplo 1.2

Solução: Quando o capacitor não tem a placa metálica entre suas armaduras sua capacitância é $C_0 = \epsilon_0 S/d$. Com a introdução da placa parte do espaço no interior do capacitor ficará preenchido pela placa. Seja que as armaduras do capacitor são carregadas com cargas q e $-q$, então o campo criado pelas armaduras levará ao aparecimento de carga induzida nas superfícies da placa metálica. As cargas induzida criarão um campo elétrico que vai se anular com o campo criado pelas armaduras, de modo que no interior do condutor o campo total seja zero. Neste caso, a capacitância do capacitor é $C = q/\Delta\varphi$, mas

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\epsilon_0 S} \left(\frac{2d}{3} - x \right) + \frac{qx}{\epsilon_0 S} = \frac{2qd}{3\epsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{3\epsilon_0 S}{2d} = \frac{3C_0}{2}.$$

1.1 Conexões de capacitores.

Com frequência os circuitos elétricos apresentam mais de um capacitor operando, e resulta útil determinar a capacitância equivalente do sistema de capacitores. Primeiramente vamos considerar um conjunto $\{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\}$ de n capacitores conectados em série, como é representado na Fig 4. Se olharmos dois capacitores adjacentes, por exemplo C_{i-1} e C_i , podemos notar que a placa direita de C_{i-1} e a placa esquerda de C_i formam um condutor isolado, e pelo tanto eletro-neutro. Então podemos concluir que $q_{i-1} - q_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Finalmente obtemos que qualquer capacitor do sistema apresenta a mesma carga q_0 . Utilizando que a capacitância equivalente é dada pela equação

$$\frac{q_0}{C_{eq}} = \Delta\varphi = \varphi_n - \varphi_0 \tag{9}$$

A diferença de potencial nos terminais 0 e n pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \varphi_n - \varphi_0 &= \varphi_n - \varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_0) \\
 &= \varphi_n - \varphi_2 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0) \\
 &= \varphi_n - \varphi_3 + (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0) \\
 &= \dots \\
 &= (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \dots + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0),
 \end{aligned} \tag{10}$$

Finalmente obtemos que

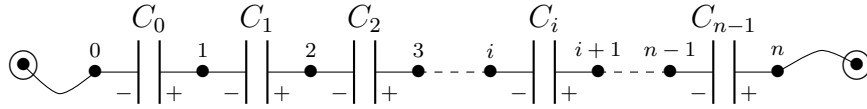


Fig 4. Conexão em série de um conjunto $\{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\}$ de n capacitores.

$$\frac{q_0}{C_{eq}} = (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \dots + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0)$$

ou seja que obtemos

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{n-1}} + \frac{1}{C_{n-2}} + \dots + \frac{1}{C_0} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{C_i}. \tag{11}$$

Ou seja, nosso circuito com n capacitores conectados em série é equivalente a um circuito com só um capacitor de capacitância C_{eq} dada pela equação (11).

Vamos considerar agora uma conexão em paralelo de capacitores, similar com a mostrada na Fig 5

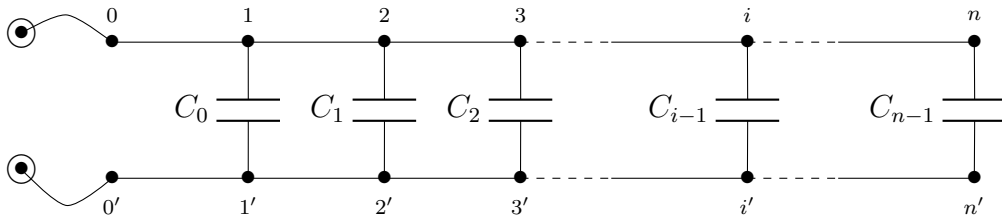


Fig 5. Conexão em paralelo de um conjunto $\{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\}$ de n capacitores.

Neste caso temos que a carga total do sistema é $q = q_0 + q_1 + \dots + q_{n-1}$ e a diferença de potencial entre os terminais de qualquer capacitor é a mesma. Então

$$C_{eq} \Delta\varphi = C_0 \Delta\varphi + C_1 \Delta\varphi + \dots + C_{n-1} \Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad C_{eq} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i. \tag{12}$$

Exemplo 1.3. No circuito mostrado na Fig 6, o fechamento da chave K não varia a capacitância equivalente do sistema. Determine o valor de C_x .

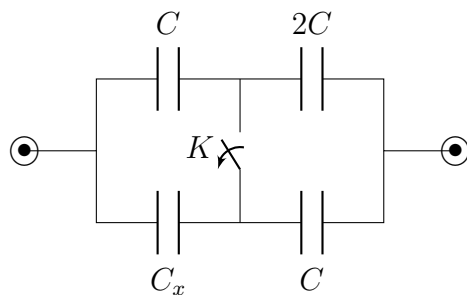


Fig 6. Esquema de capacitores para o exemplo 1.3.

Solução: Quando a chave esta fechada temos que o capacitor C superior esta em paralelo com C_x , o que resulta em um capacitor equivalente $C_1 = C + C_x$. O capacitor $2C$ e o capacitor C inferior também estão conectados em paralelo, então podem ser substituídos por um capacitor $C_2 = 3C$. Neste caso os capacitores resultantes C_1 e C_2 estão conectados em série, então a capacitância equivalente é

$$C_{\text{close}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3C(C + C_x)}{4C + C_x}.$$

Quando a chave esta aberta os capacitores C e $2C$ superiores estão conectados em série, então podem ser trocados por um capacitor $C'_1 = 2C/3$. Os capacitores inferiores C e C_x , também conectados em série podem ser trocados pelo capacitor equivalente $C'_2 = CC_x/(C + C_x)$. Finalmente, como C'_1 e C'_2 estão conectados em paralelo, obtemos a capacitância equivalente

$$C_{\text{open}} = C'_1 + C'_2 = \frac{2C}{3} + \frac{CC_x}{C + C_x}.$$

A condição do problema indica que $C_{\text{open}} = C_{\text{close}}$, então é imediato que $C_x = C/2$.

Os capacitores podem aparecer com outros elementos de circuito, por exemplo uma bateria com força eletromotriz \mathcal{E} . Vamos considerar a seguinte seção de circuito, ver Fig 7. Suponha que conhecemos a diferença de potencial $\varphi_a - \varphi_b$, e a nossa missão é achar a carga em cada capacitor. Bom ..., achar a carga, a fim das contas os capacitores estão conectados em série.

Pela lei de Ohm obtemos que

$$\varphi_a - \varphi_b = \Delta\varphi_1 - \mathcal{E} + \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_1} - \mathcal{E} + \frac{q}{C_2}, \quad (13)$$

ou seja que

$$\varphi_a - \varphi_b = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) - \mathcal{E} \Rightarrow q = \frac{C_1 C_2 (\mathcal{E} + \Delta\varphi_{ab})}{C_1 + C_2}, \quad (14)$$

onde $\Delta\varphi_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$.

Nota 3. Se a polaridade da força electromotriz for diferente, mas os sinais das cargas nas placas dos capacitores for igual, então a lei de Ohm tem a forma

$$\varphi_a - \varphi_b = \Delta\varphi_1 + \mathcal{E} + \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_1} + \mathcal{E} + \frac{q}{C_2}.$$

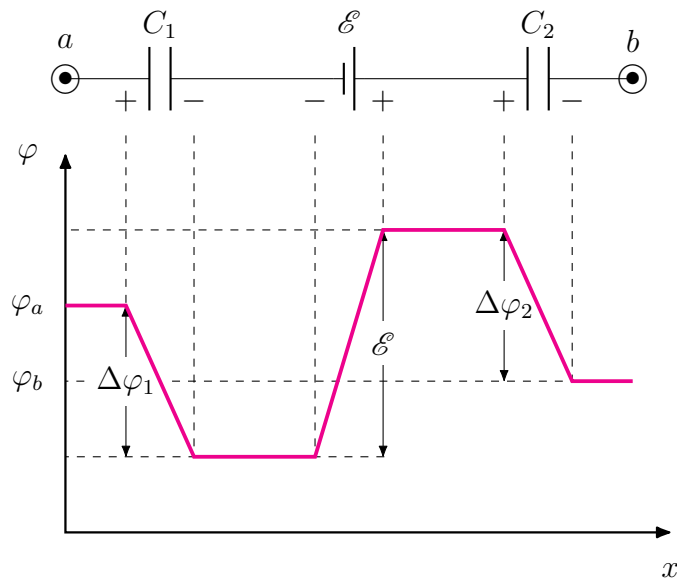


Fig 7. Representação gráfica da lei de Ohm.

Vejamos um exemplo relacionado com a lei de Ohm.

Exemplo 1.4. Encontre a carga de cada um dos capacitores C_1 , C_2 e C_3 cujo circuito de acoplamento é apresentado na Fig 8. A força eletromotriz da bateria é \mathcal{E} .

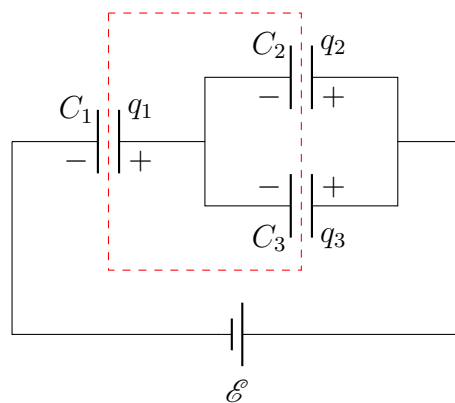


Fig 8. Circuito para exemplo 1.4. As linhas vermelhas limitam um condutor isolado.

Solução: A capacitância equivalente do sistema é

$$C = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3},$$

então a carga total é $Q = C\mathcal{E}$, note que esta carga coincide com a carga do capacitor C_1 , ou seja que

$$q_1 = \frac{\mathcal{E}C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Como o condutor isolado fechado pelas linhas vermelhas é eletro-neutro, temos que $q_1 - q_2 - q_3 = 0$, mas, é claro que os capacitores C_2 e C_3 estão conectados em paralelo, então

$q_2/C_2 = q_3/C_3$. Finalmente, utilizando as equações anteriores obtemos que

$$q_2 = \frac{\mathcal{E}C_1C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \quad \text{e} \quad q_3 = \frac{\mathcal{E}C_1C_3}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

1.2 Métodos para calcular capacitâncias equivalentes

Geralmente qualquer circuito de capacitores pode ser transformado em um conjunto de capacitores em séries y paralelos, embora as transformações não são tão simples em alguns casos.

Primeiramente vamos estudar um exemplo clássico e histórico no contexto das olimpíadas de física.

Exemplo 1.5. Encontre a capacitância de um sistema de capacitores, entre os pontos 1 e 4, mostrados no diagrama da Fig 9

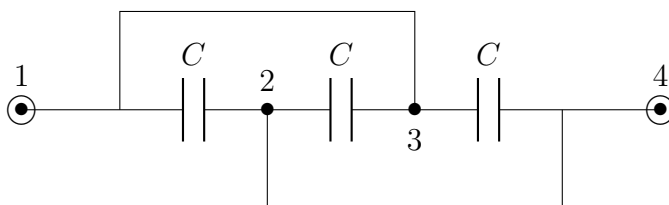


Fig 9. Esquema de capacitores do exemplo 1.5

Pelo esquema mostrado, é claro que o potencial dos nós 1 e 3 são iguais. Também podemos garantir a igualdade dos potenciais nos nós 2 e 4. Então o circuito original pode ser substituído pelo circuito equivalente que apresentamos na Fig 10:

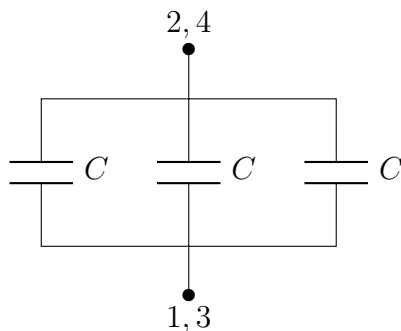


Fig 10. Circuito equivalente ao apresentado na Fig 9

Finalmente obtemos que $C_{14} = C + C + C = 3C$

Agora vamos estudar um exemplo que deve ser analisado com muita tranquilidade, onde não temos uma situação tão simétrica.

Exemplo 1.6. Encontre a capacitância do sistema de capacitores conectados conforme a Fig 11.

Solução: Vamos denotar por φ_i e $q_i = C_i\varphi_i$ a tensão e carga no capacitor de capacitância C_i (ver Fig 12). Se este sistema de capacitores estiver conectado a uma bateria com força

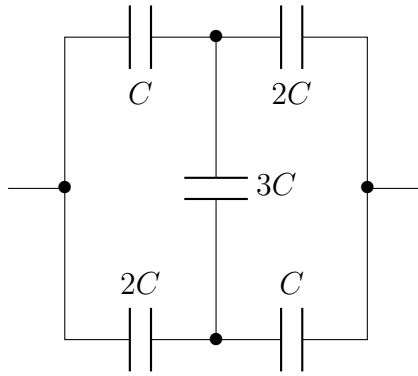


Fig 11. Sistema de capacitores do exemplo 1.6

eletromotriz \mathcal{E} , então a capacidade total do sistema é dada por

$$C_T = \frac{q_1 + q_2}{\mathcal{E}} = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{\mathcal{E}}. \quad (15)$$

Vamos anotar as relações óbvias (ver Fig 12):

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \mathcal{E}, \quad (16)$$

$$\varphi_4 + \varphi_5 = \mathcal{E}, \quad (17)$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5 = \mathcal{E}. \quad (18)$$

Levando em consideração a polaridade esperada da carga no capacitor C_3 , a lei da conservação da carga, escrita para as áreas selecionadas em cores (ver Fig 12), dá

$$q_1 - q_2 - q_3 = 0 \quad \text{e} \quad q_3 + q_4 - q_5 = 0. \quad (19)$$

Estas equações, após substituir os valores de capacitância correspondentes, são reduzidas para

$$\varphi_1 - 2\varphi_2 - 3\varphi_3 = 0, \quad (20)$$

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 - \varphi_5 = 0. \quad (21)$$

Resolvendo o sistema de equações (16) - (21), podemos encontrar as tensões φ_1 e φ_2 :

$$\varphi_1 = \frac{5}{9}\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \frac{4}{9}\mathcal{E} \quad (22)$$

Então, finalmente, de acordo com a expressão (15), temos

$$C_T = \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{\mathcal{E}}C = \frac{13}{9}C. \quad (23)$$

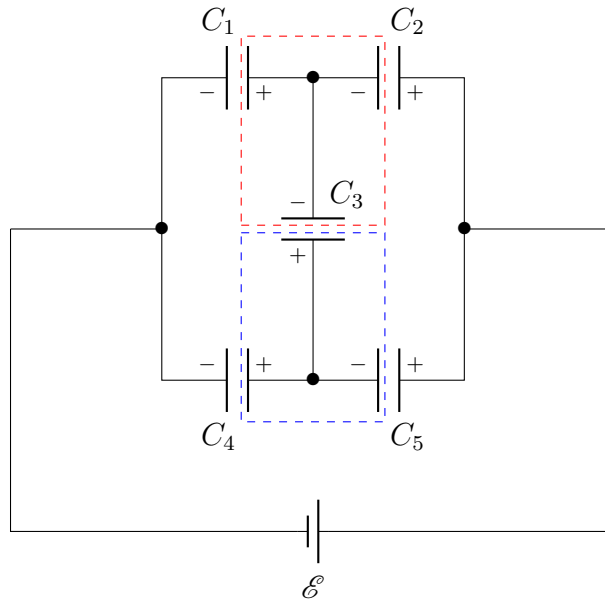


Fig 12. Sistema de capacitores conectado a uma bateria com força eletromotriz \mathcal{E} . Os circuitos descontínuos em azul e vermelho encerram condutores isolados com carga total nula

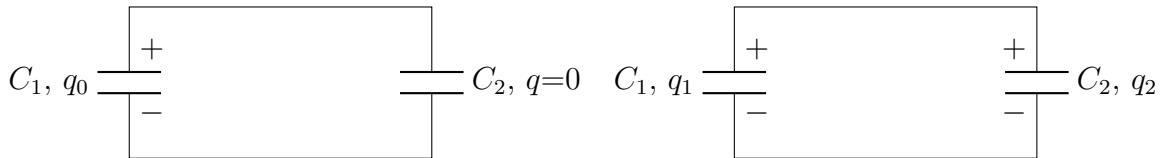


Fig 13. Esquema para analisar a redistribuição de cargas no circuito. Na esquerda temos as condições iniciais, mas não temos equilíbrio de cargas

1.3 Carregando Capacitores

Suponha que contamos com uma bateria com força eletromotriz \mathcal{E} e dois capacitores, de capacitância C_1 e C_2 , que estão inicialmente descarregados. Vamos analisar diferentes situações.

Seja que o capacitor C_1 é conectado com a bateria e, após se estabelecer o equilíbrio no sistema, a bateria é desconectada e o capacitor C_1 é conectado ao capacitor C_2 formando um circuito fechado. A questão é determinar as cargas nos capacitores após a última conexão (ver Fig 13).

Após a conexão de C_1 com a bateria, a carga no primeiro capacitor será $q = C_1\mathcal{E}$. Passado um tempo suficiente, após a conexão dos capacitores, a carga q vai se distribuir nas placas dos capacitores até eles ficar com a mesma diferença de potencial. Sejam as cargas q_1 e q_2 , então pela lei de conservação da carga temos que $q = q_1 + q_2$, pela condição de igual potencial nos capacitores $q_1/C_1 = q_2/C_2$, ou seja

$$q_1 = \frac{C_1^2\mathcal{E}}{C_1 + C_2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{C_1C_2\mathcal{E}}{C_1 + C_2}. \quad (24)$$

Finalmente vamos desconectar os capacitores e conectar eles de volta com a particularidade de que a placa positiva do primeiro capacitor é ligada à placa negativa do segundo

capacitor, ver Fig 14. As outras placas são ligadas de forma que o circuito é fechado. Encontremos as cargas e o potencial nos capacitores após atingido o novo equilíbrio.

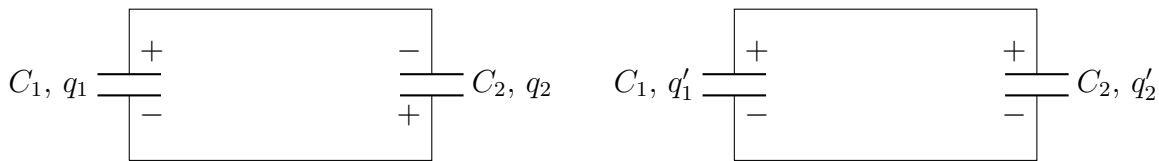


Fig 14. Esquema para analisar a redistribuição de cargas no circuito. Na esquerda temos as condições iniciais, mas não temos equilíbrio de cargas. Neste caso note que inicialmente as placas de sinais contrários estão conectadas.

Pela lei da conservação da carga temos que $q_1 - q_2 = q'_1 + q'_2$, além da condição que garante a igualdade dos potenciais nos capacitores, ou seja, $\varphi = q'_1/C_1 = q'_2/C_2$, então

$$q_1 - q_2 = q'_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \Rightarrow q'_2 = \frac{C_2 (q_1 - q_2)}{C_1 + C_2}, \quad (25)$$

ou seja que

$$q'_2 = \frac{\mathcal{E} C_1 C_2 (C_1 - C_2)}{(C_1 + C_2)^2} \quad \text{e} \quad q'_1 = \frac{\mathcal{E} C_1^2 (C_1 - C_2)}{(C_1 + C_2)^2}. \quad (26)$$

A tensão neste caso é

$$\varphi = \frac{\mathcal{E} C_1 (C_1 - C_2)}{(C_1 + C_2)^2}. \quad (27)$$

1.3.1 Máxima tensão

Que tensão máxima podemos obter se temos uma bateria com força eletromotriz \mathcal{E} e dois capacitores idênticos sem fugas de cargas?

Ao carregar cada um dos capacitores utilizando a bateria até a tensão $\varphi_0 = \mathcal{E}$ y conectar a bateria em série com os capacitores como é mostrado na Fig 15, podemos obter a tensão $\Delta\varphi_{ab} = 3\mathcal{E}$. Mas, esta não é a tensão máxima possível.

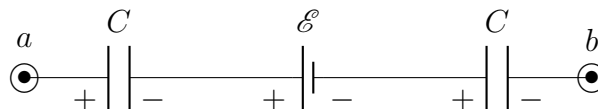


Fig 15. Esquema de conexão em série

Vamos conectar em série a bateria com um dos capacitores carregados e com o segundo capacitor fechamos o circuito como é mostrado na Fig 16. Seja que as cargas dos capacitores, após o equilíbrio, são q_1 e q_2 , e as tensões nos capacitores são φ_1 e φ_2 , pela lei de Ohm obtemos que

$$\mathcal{E} + \varphi_1 = \varphi_2. \quad (28)$$

A carga total das placas direitas (ver Fig 16) dos capacitores é igual a $2C\mathcal{E}$. Esta carga tem que é distribuída nas placas, mas ela não pode mudar o valor pela lei da conservação da carga. Logo temos

$$q_1 + q_2 = 2C\mathcal{E}. \quad (29)$$

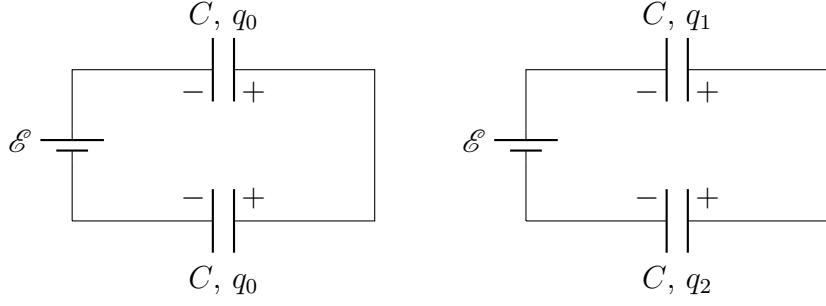


Fig 16. Esquema de conexão secundário. Na esquerda temos o problema inicial, mas não temos equilíbrio de cargas.

Solucionando as equações anteriores obtemos que

$$q_2 = \frac{3C\mathcal{E}}{2} \Rightarrow q_1 = 2C\mathcal{E} - \frac{3C\mathcal{E}}{2} = \frac{C\mathcal{E}}{2}, \quad (30)$$

O que implica que $\varphi_1 = \mathcal{E}/2$ e $\varphi_2 = 3\mathcal{E}/2$. Finalmente podemos novamente conectar a bateria com o capacitor C_1 e levar ele para a tensão $\tilde{\varphi}_1 = \mathcal{E}$. Uma vez foi terminado o protocolo anterior, retornando á Fig 15 podemos conseguir

$$\Delta\varphi_{ab} = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \frac{3\mathcal{E}}{2} = \frac{7\mathcal{E}}{2}. \quad (31)$$

Suponha que o protocolo é repetido um número n muito grande de vezes. No início de cada passo, o capacitor 1 inicia com a tensão \mathcal{E} e a carga $C\mathcal{E}$. No j -ésimo passo o capacitor 2 terá a carga $q_{2,j}$ e a tensão $\varphi_{2,j} = q_{2,j}/C$, que estão vinculadas pelas condições

$$q_0 + q_{2,j-1} = q_{1,j} + q_{2,j}, \quad (32)$$

$$\mathcal{E} + \varphi_{1,j} = \varphi_{2,j} \Rightarrow q_{1,j} = q_{2,j} - C\mathcal{E} \quad (33)$$

onde $j = 1, \dots, n$. Juntando as equações obtemos que

$$C\mathcal{E} + q_{2,j-1} = 2q_{2,j} - C\mathcal{E} \Rightarrow 2q_{2,j} - q_{2,j-1} - 2C\mathcal{E} = 0. \quad (34)$$

Note que a equação anterior pode ser escrita em termos dos potenciais $\varphi_{2,j}$ na forma

$$\varphi_{2,j} = \frac{\varphi_{2,j-1}}{2} + C\mathcal{E} \quad \text{onde } j = 1, \dots, n \quad (35)$$

Notemos que

$$\varphi_{2,j} - \varphi_{2,j-1} = \frac{1}{2}(\varphi_{2,j-1} - \varphi_{2,j-2}) = \dots = \frac{1}{2^{j-1}}(\varphi_{2,1} - \varphi_{2,0}), \quad (36)$$

finalmente

$$\varphi_{2,j} - \varphi_{2,j-1} = \frac{1}{2^{j-1}}(\varphi_{2,1} - \varphi_{2,0}). \quad (37)$$

Somando para $j = 1, 2, \dots, n$ a igualdade anterior obtemos que

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_{2,j} - \varphi_{2,j-1}) = (\varphi_{2,1} - \varphi_{2,0}) \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j-1}} = 2(\varphi_{2,1} - \varphi_{2,0}) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \quad (38)$$

mas também temos que

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_{2,j} - \varphi_{2,j-1}) = \varphi_{2,n} - \varphi_{2,0}, \quad (39)$$

dado que é uma soma telescópica. Finalmente

$$\varphi_{2,n} - \varphi_{2,0} = 2(\varphi_{2,1} - \varphi_{2,0}) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \quad (40)$$

Utilizando que $\varphi_{2,0} = \mathcal{E}$ e $\varphi_{2,1} = 3\mathcal{E}/2$. Então $\varphi_{2,1} - \varphi_{2,0} = \mathcal{E}/2$,

$$\varphi_{2,n} = \mathcal{E} + \mathcal{E} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \mathcal{E} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (41)$$

note que quando $n \rightarrow \infty$ então $\varphi_{2,\infty} \rightarrow 2\mathcal{E}$. Finalmente temos que, pelo esquema da Fig 15 obtemos que $\Delta\varphi_{ab} \rightarrow 4\mathcal{E}$.

2 Métodos para calcular resistências equivalentes

O cálculo de resistências equivalentes, uma prática fundamental na eletrônica e na teoria dos circuitos, remonta ao desenvolvimento inicial da teoria das redes elétricas no século XIX. A necessidade de determinar como múltiplas resistências se comportam quando combinadas em circuitos complexos impulsionou o desenvolvimento de métodos analíticos e empíricos para encontrar valores únicos que representassem essas combinações. Tais métodos são baseados em nos princípios e leis fundamentais que descrevem o funcionamento dos circuitos elétricos, ou seja, lei de Ohm e leis de Kirchhoff (essencialmente leis de conservação de carga e energia).

Mas ..., imagine que você tem um sistema de muitos resistores conectados por fios ideais, de modo que o circuito resultante contem muitos nós e muitas malhas fechadas. Cada par de nó e malha geram duas equações que vinculam correntes e potenciais no circuito. Então se você tem n nós e m malhas, vamos ter que resolver um sistema de $n + m$ equações para conhecer como são distribuídas as correntes do circuito e os potenciais nos diferentes nós. Finalmente com essa informação poderíamos determinar a resistência equivalente do circuito.

Bom, é claro que resolver um sistema de grande número de equações com muitas incógnitas não é a melhor forma de perder o tempo (por exemplo num exame). Portanto, precisarmos de métodos que permitam encontrar rapidamente a resistência de um circuito.

Vamos inicial com algumas conexões simples de resistores, é claro que estamos falando de conexões de resistores em série e paralelo. Um conjunto $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ de n resistores formam uma conexão em série quando a corrente total I que passa em cada resistor (ver Fig 17). Por definição a resistência equivalente, R_{eq} do circuito de resistores em série está relacionada com a corrente total I e a diferença de potencial nos terminais do circuito pela lei de Ohm

$$R_{eq}I = \varphi_n - \varphi_0. \quad (42)$$

A diferença de potencial nos terminais 0 e n pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varphi_n - \varphi_0 &= \varphi_n - \varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_0) \\ &= \varphi_n - \varphi_2 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0) \\ &= \varphi_n - \varphi_3 + (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0) \\ &= \dots \\ &= (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \dots + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0), \end{aligned} \quad (43)$$

essencialmente a equação anterior fala que a diferença de potencial entre os terminais do circuito pode ser representada como a soma da diferença de potencial nos terminais de cada resistência. Então, utilizando as equações (42) e (43) obtemos que

$$R_{eq}I = (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \dots + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_0), \quad (44)$$

finalmente dividindo ambos os membros da (44) pela corrente total do circuito, e considerando que pela lei de Ohm $\varphi_i - \varphi_{i-1} = IR_{i-1}$ para todo $i = 1, \dots, n$, obtemos

$$R_{eq} = R_{n-1} + R_{n-2} + \dots + R_1 + R_0 = \sum_{i=0}^{n-1} R_i. \quad (45)$$

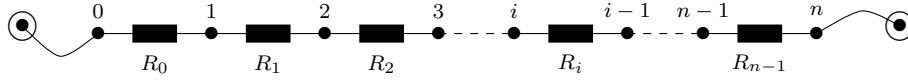


Fig 17. Conexão em série de um conjunto $\{R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}\}$ de n resistores.

Ou seja, nosso circuito com n resistores conectados em série é equivalente a um circuito com só um resistor de valor R_{eq} dado pela equação (45).

Vamos considerar novamente o nosso conjunto de n resistores, mas agora conectados em paralelo (ver Fig 18). A condição é que cada resistor tem a mesma diferença de potencial,

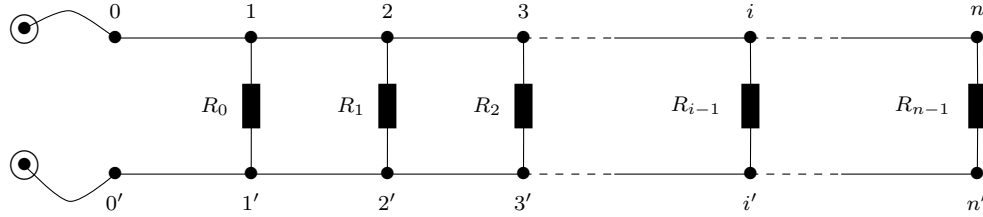


Fig 18. Conexão em paralelo de um conjunto $\{R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}\}$ de n resistores.

$\Delta\varphi$, entre os seus nós. Ou seja, temos que

$$\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_{0'} = \varphi_1 - \varphi_{1'} = \dots = \varphi_n - \varphi_{n'}. \quad (46)$$

Pela primeira lei de Kirchhoff a corrente total I que circula entre os terminais 0 e 0' é igual à soma das correntes que circulam em cada resistor, ou seja temos que

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n, \quad (47)$$

logo dividindo ambos os membros da equação (47) pelo valor $\Delta\varphi$, e utilizando a lei de Ohm $R_{i-1}I_i = \varphi_i - \varphi_{i'} = \Delta\varphi$ para todo $i = 1, \dots, n$, obtemos que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_{n-2}} + \frac{1}{R_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{R_i}. \quad (48)$$

Ou seja, nosso circuito de n resistores conectados em paralelo é equivalente a um circuito com só um resistor de valor R_{eq} dado pela equação (48).

2.1 Método do nó equipotencial

A ideia do método é tratar diferentes nós de um circuito que possuem potenciais iguais como só um nó ou *super-nó*. Neste caso, o potencial no super-nó é igual ao potencial dos nós que o compõem.

Se os componentes de um super-nó em um circuito elétrico são juntados por um condutor ideal, então as condições elétricas do circuito não mudarão, pois nenhuma corrente fluirá através de este condutor.

Vejamos um par de exemplos para entender o anterior.

Exemplo 2.1. Encontre a resistência equivalente à seção do circuito mostrada na Fig 19-esquerda, se todas as resistências vermelhas são iguais a r .

Solução: Se conectamos os nós A e B nos terminais de uma fonte de corrente constante (entregando a corrente I) é fácil entender que os nós 1, 2 e 3 possuem potenciais iguais. Na verdade a partir de considerações de simetria, fica claro que as correntes que fluem através dos ramos $A-1$, $A-2$ e $A-3$ são as mesmas e iguais a $I/3$. Portanto, devido à igualdade das resistências desses ramos, as quedas de potenciais sobre eles também são iguais.

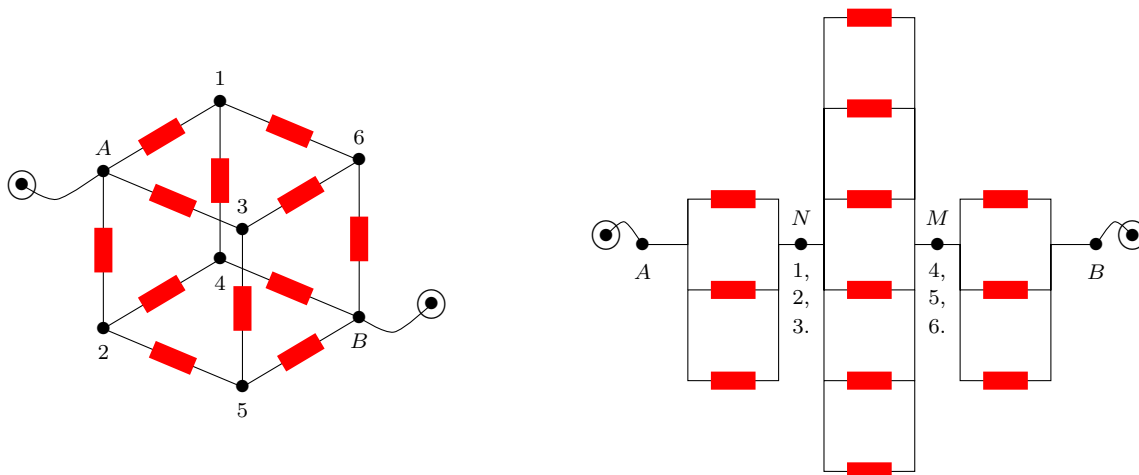


Fig 19. Circuito para o exemplo 2.1: esquerda conexão cúbica de resistências, direita representação plana equivalente ao cubo de resistências. Cada resistor vermelho é de valor r .

Da mesma forma, pode-se mostrar que os nós 4, 5 e 6 também possuem potenciais iguais. É claro que a resistência do circuito não mudará se os nós 1, 2 e 3 estiverem conectados entre si (super-nó N) e os nós 4, 5 e 6 também estiverem conectados entre si (super-nó M). Feito isso, obtemos um circuito equivalente, representado na Fig 19-direita. A resistência deste circuito não é difícil de encontrar se conhecemos as resistências dos ramos $A-N$, $N-M$ e $M-B$

$$R_{eq} = R_{AN} + R_{NM} + R_{MB} \quad (49)$$

onde $R_{AN} = R_{MB} = r/3$ e $R_{NM} = r/6$. Finalmente obtemos que

$$R_{eq} = \frac{2r}{3} + \frac{r}{6} = \frac{5r}{6}. \quad (50)$$

Exemplo 2.2. Encontre a resistência equivalente à seção do circuito mostrada na Fig 20-esquerda, se todas as resistências vermelhas são iguais a r .

Solução: Bom..., se você achou que a resistência é a mesma que no exemplo 2.1, então está errado. Se bem ainda temos um cubo de resistências, observe que queremos medir resistência equivalente entre dois nós diferentes ao exemplo anterior. Claramente se a corrente total I entregue ao circuito, digamos no nó A , então ela vai se distribuir pelos diferentes ramos do cubo de uma forma diferente a como foi distribuída no exemplo 2.1. Note que agora os nós 1 e 2, assim como os nós 3 e 4 pertencem a dois super-nós diferentes (pares de

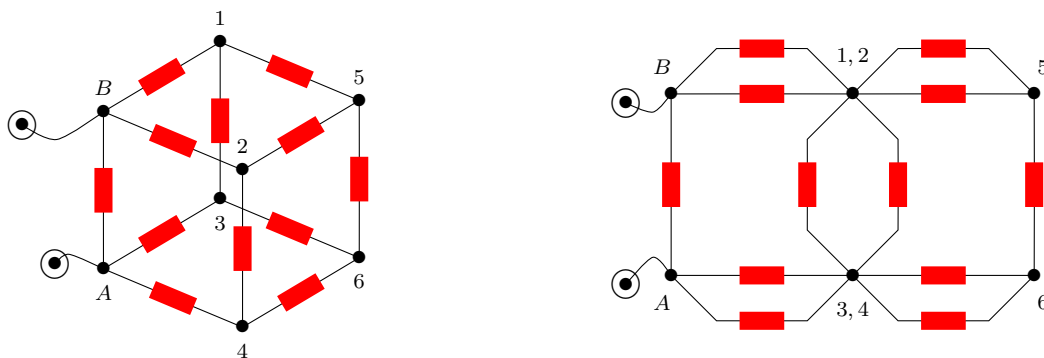


Fig 20. Circuito para o exemplo 2.2: esquerda conexão cúbica de resistências, direita representação plana equivalente ao cubo de resistências. Cada resistor vermelho é de valor r .

nós equipotenciais). Ao conectar os componentes de cada super-nó, obtemos um circuito equivalente (ver Fig 20-direita).

Note que a resistência equivalente no novo circuito é bem simples de achar, basta fazer algumas transformações em série e paralelo (ver Fig 21) e obteremos a resistência equivalente, $R_{A-B} = 7r/12$.

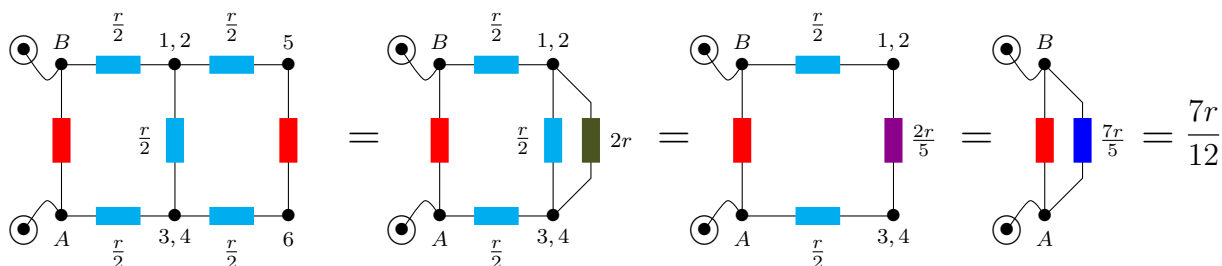


Fig 21. Transformações de equivalência que são realizadas sucessivamente no circuito da Fig 20-direita até chegar num valor de resistência equivalente

2.2 Método de exclusão de circuito

Este método está intimamente relacionado ao anterior. Se uma seção do circuito estiver conectada entre dois nós que pertencem ao mesmo super-nó (os nós são equipotenciais), essa seção pode ser excluída do circuito. Neste caso, será obtido um circuito equivalente, pois nenhuma corrente fluiu pela seção excluída. Às vezes, após eliminar uma seção, é aconselhável conectar nós equipotenciais entre si.

Vamos começar com algo muito simples.

Exemplo 2.3. Encontre a resistência equivalente da seção do circuito mostrado na Fig 22.

Solução: A partir de considerações de simetria, é óbvio que as correntes nos ramos $A-M$ e $A-N$ são iguais. Portanto, os nós M e N são equipotenciais, ou seja, eles pertencem ao mesmo super-nó. Excluindo a seção $M-N$, pois nenhuma corrente pode fluir entre dois nós que pertencem ao mesmo super-nó, obtemos um circuito equivalente (ver Fig 22), cuja resistência equivalente é facilmente encontrada: $R_{AB} = 3r/2$.

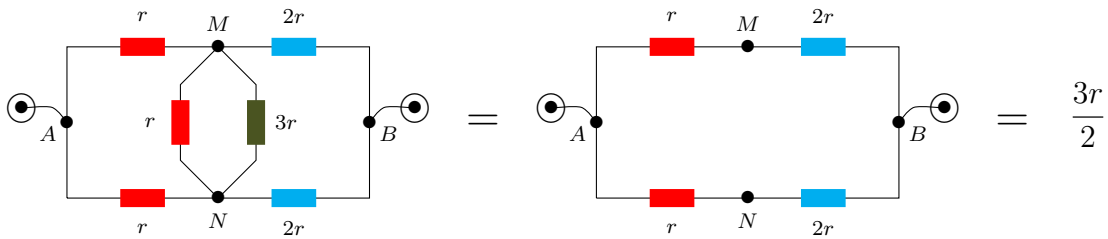


Fig 22. Circuito para o exemplo 2.3. Transformações equivalentes (exclusão do ramo $M-N$).

Exemplo 2.4. Encontre a resistência da seção do circuito $A-B$ mostrada na Fig 23. Todas as resistências no diagrama são iguais a r .

Solução: Note que os nós F e F' pertencem ao mesmo super-nó (são equipotenciais) e, portanto, nenhuma corrente flui através da seção $F-F'$. Portanto, podemos remover a seção $F-F'$ e obter um circuito equivalente.

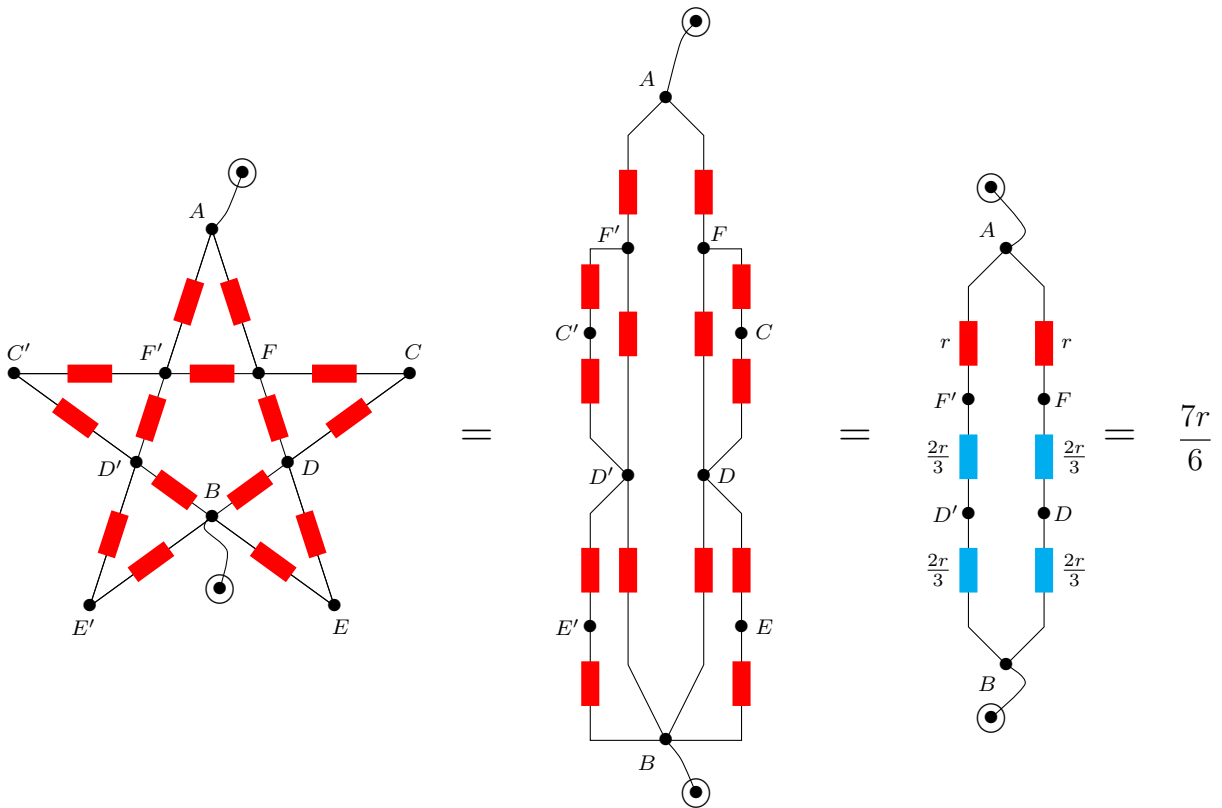


Fig 23. Circuito em estrela para o exemplo 2.4. Conjunto de transformações equivalentes.

Após simples transformações do circuito resultante é fácil calcular que sua resistência é $R_{AB} = 7r/6$. Em este exemplo podemos mudar o valor das resistências que formam o pentágono interno $BDF F' D'$ da estrela para outro valor (mantendo eles iguais entre si) e, o valor da resistência equivalente será outro, mas a simetria do problema permanece invariante, ou seja, podemos resolver o problema utilizando as mesmas transformações. Acontecerá alguma coisa com a solução do problema (resistência equivalente) se mudamos apenas o

valor da resistência do ramo $F-F'$?

2.3 Método de reprodução de nós

Este método também está intimamente relacionado ao método do nó equipotencial. Se a substituição de vários nós equipotenciais por um (super-nó) levar a um circuito equivalente, então a transformação reversa de um nó por vários nós equipotenciais não violará as condições elétricas no resto do circuito.

Vamos dar exemplos de circuitos para os quais tal transformação é apropriada.

Exemplo 2.5. Encontre a resistência da seção do circuito mostra na Fig 24. Cada resistência vermelha tem um valor r .

Solução: Vamos substituir o nó O por três nós, O_1 , O_2 e O_3 . Porém, ainda precisamos provas que essas cadeias são equivalentes. Para a equivalência das cadeias é necessário que os nós O_1 , O_2 e O_3 sejam equipotenciais. Mas isso é óbvio, já que a diferença de potencial $\varphi_{O_2} - \varphi_A$ é igual à metade da diferença de potencial u_{AB} entre os pontos A e B : $\varphi_{O_2} - \varphi_A = u_{AB}/2$. Também temos que $\varphi_{O_1} - \varphi_A = u_{AB}/2$ e $\varphi_{O_3} - \varphi_A = u_{AB}/2$. Por isso $\varphi_{O_1} = \varphi_{O_2} = \varphi_{O_3}$, ou seja os nós O_1 , O_2 e O_3 são de fato equipotenciais, e eles pertencem ao super-nó O . Então podemos concluir a equivalência entre os dois primeiros circuitos. O passo do segundo circuito para o terceiro circuito é trivial, assim como o resto das transformações até concluir que a resistência equivalente do circuito é $R_{AB} = 4r/5$.

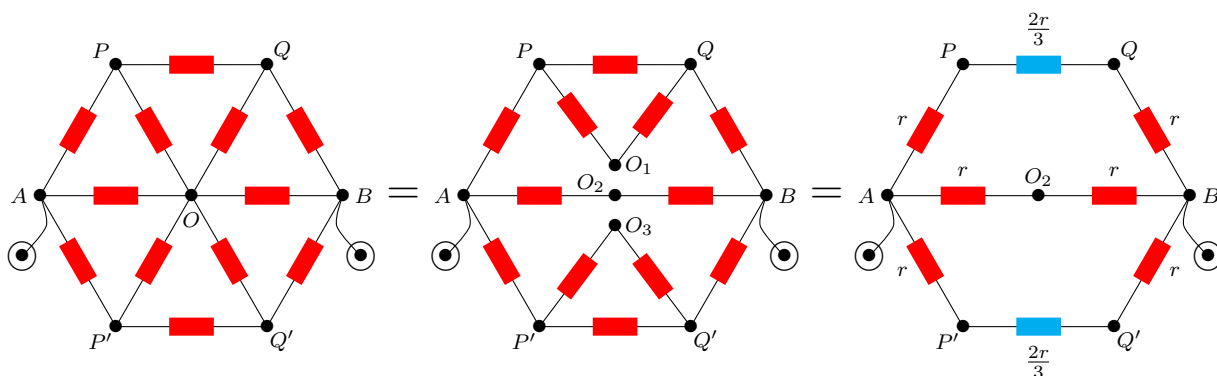


Fig 24. Circuito hexagonal para o exemplo 2.5. Conjunto de transformações sucessivas.

Exemplo 2.6. Determine a resistência equivalente da seção do circuito $A-B$ mostrada na Fig 25. Todas as resistências vermelhas são de valor r .

Solução: Vamos “dividir” os nós P e Q em pares de nós equipotenciais P_1, P_2 e Q_1, Q_2 . Agora nosso circuito é uma conexão paralela de dois circuitos idênticos, então basta considerar um deles (ver Fig 25-direita). É fácil ver que o nó P_1 é equipotencial com o nó P'_1 , e que os nós Q_1 e Q'_1 também são equipotenciais, portanto, eles podem ser conectados em um super-nó, logo obtemos o circuito mostrado na Fig 25. A resistência do “medio” circuito da conexão em paralelo é $11r/3$. Consequentemente, a resistência do circuito total é $R_{AB} = 11r/6$.

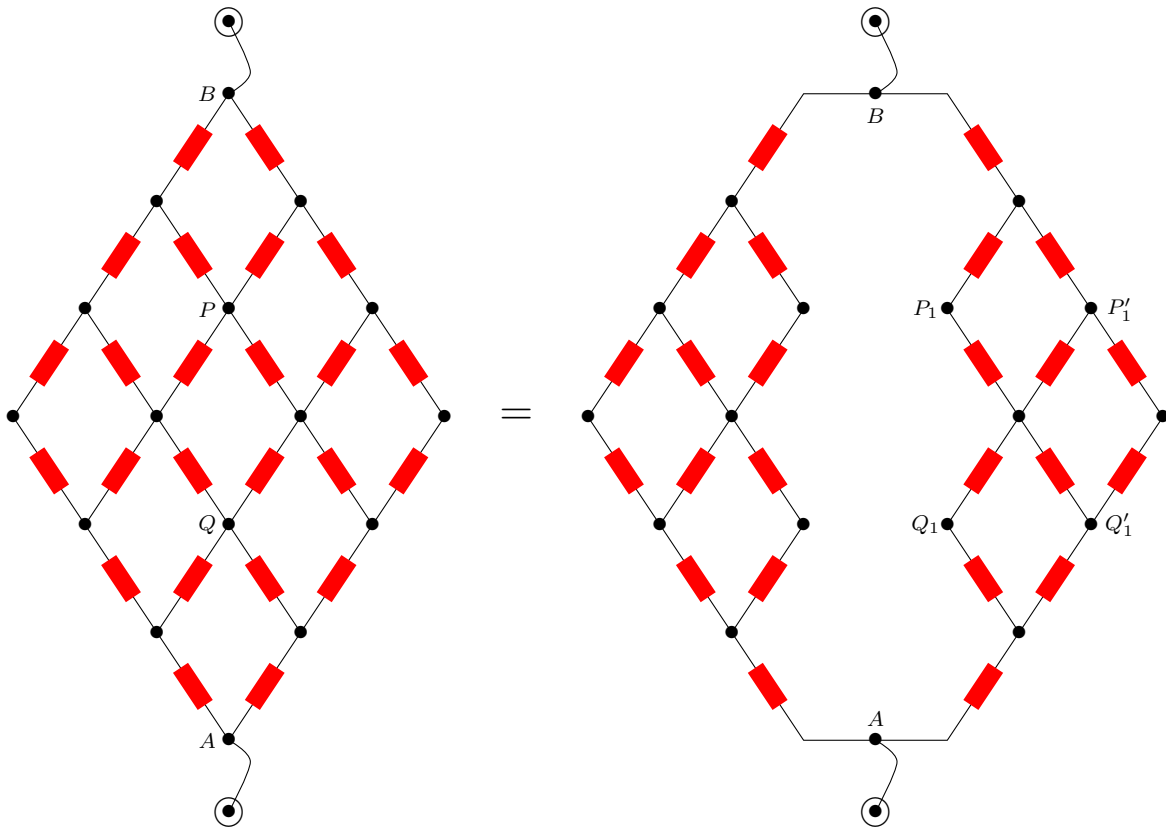


Fig 25. Circuito para o exemplo 2.6. Decomposição do circuito complexo original em dois ramos não tão complexos conectados em paralelo.

2.4 Método de divisão de ramificação

Sabemos que vários ramos paralelos ou sequenciais podem ser substituídos por um ramo equivalente.

O exemplo abaixo mostra que às vezes é útil aplicar essas regras na direção oposta - não para “mesclar” ramificações, mas para “dividi-las”.

Exemplo 2.7. Encontre a resistência R do circuito mostrado na Fig 26.

Solução: Vamos substituir o ramo $O-C$ por dois ramos paralelos com resistências iguais de $2r$. Em seguida, bifurcamos o nó C em nós equipotenciais C_1 e C_2 (sua equipotencialidade segue de considerações de simetria em relação aos nós A e O). O circuito mostrado na segunda Fig 26, é equivalente ao circuito da primeira Fig 26. Vamos encontrar sua resistência. As seções $B-O$ e $B-C_1-O$ estão conectadas em paralelo. Portanto a resistência $R_{BO} = 3r/4$. Da mesma maneira $R_{OD} = 3r/4$. Agora os nós A e O estão conectados por três ramos paralelos com resistências $7r/4$, r , $7r/4$. A resistência total do circuito é $R = 7r/15$.

Bom, uma vez que o problema foi resolvido podemos tentar responder as seguintes perguntas como tarefa:

1. O que vai acontecer na resposta final se mudamos os valores das resistências das diagonais do quadrado para outro valor (mantendo todas elas iguais entre si)

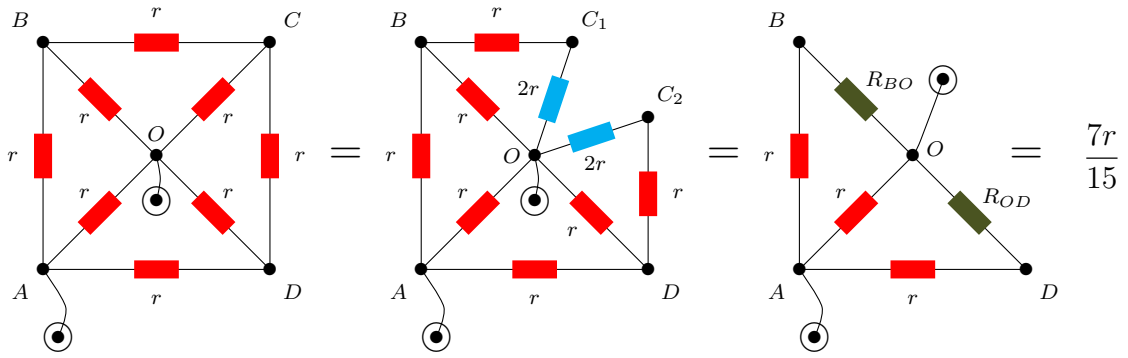


Fig 26. Figura para o Exemplo 2.7. Sequência de transformações do circuito.

2. O que vai acontecer se a mudança proposta no item anterior só é efetuada nas resistências da diagonal AC .

2.5 Conexões infinitas

Exemplo 2.8. O diagrama de circuito mostrado na Fig 27 consiste em um número muito grande (infinito) de elementos. As resistências dos resistores em cada elemento subsequente diferem por um fator κ das resistências dos resistores nos elementos anteriores. Determine a resistência R_{AB} entre os pontos A e B se as resistências do primeiro elemento forem R_1 e R_2 .

Solução: Segue-se de considerações de simetria que se removermos o primeiro elemento do circuito, a resistência do circuito restante entre os pontos C e D será $R_{CD} = \kappa R_{AB}$. Portanto, o circuito equivalente da cadeia infinita terá a forma mostrada na Fig 27. Aplicando a este

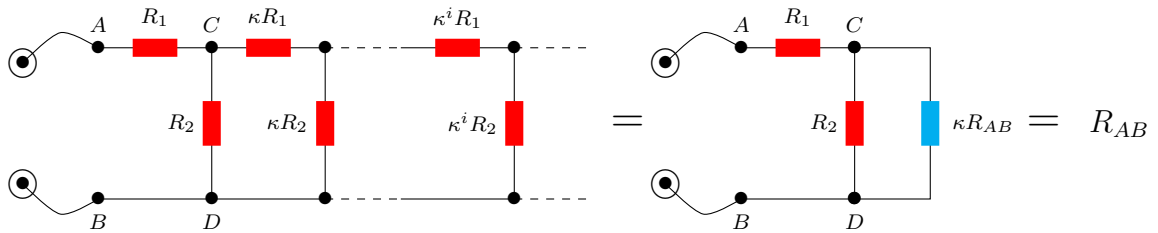


Fig 27. Circuito infinito e o circuito finito equivalente para o exemplo 2.8.

circuito as fórmulas para a resistência dos resistores conectados em série e em paralelo, obtemos

$$R_{AB} = R_1 + \frac{\kappa R_2 R_{AB}}{R_2 + \kappa R_{AB}} \quad (51)$$

ou seja, obtemos que

$$(R_{AB} - R_1)(R_2 + \kappa R_{AB}) = \kappa R_2 R_{AB}, \quad (52)$$

de onde

$$\kappa R_{AB}^2 + [(1 - \kappa)R_2 - \kappa R_1] R_{AB} - R_1 R_2 = 0 \quad (53)$$

Vamos estudar alguns casos particulares da equação (53). Primeiramente se $\kappa = 0$, então obtemos que $R_{AB} = R_1$, onde o resistor R_2 está curto-circuitado. No caso em que $\kappa \rightarrow \infty$ teremos que $R_{AB} = R_1 + R_2$. No caso $\kappa = 1$ e $R_1 = R_2 = R$ obtemos a equação

$$R_{AB}^2 - RR_{AB} - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) R. \quad (54)$$

Olhando novamente para a equação (53), podemos notar que obviamente ela pode ter duas soluções, digamos ambas as soluções serão reais no caso

$$[(1 - \kappa)R_2 - \kappa R_1]^2 + 4\kappa R_1 R_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad [1 - \kappa(1 + \alpha)]^2 + 4\kappa\alpha \geq 0, \quad (55)$$

onde claramente $\alpha = R_1/R_2 > 0$, então dado que $\kappa > 0$ a desigualdade anterior sempre é verdadeira. O leitor pode estudar os casos onde a desigualdade se transforma em igualdade.

Exemplo 2.9. Determine a resistência R_{AB} entre os pontos A e B da moldura feita de fio fino e homogêneo (ver Fig 28), assumindo que o número de triângulos equiláteros embutidos sucessivamente (com lados diminuindo pela metade) tende ao infinito. O comprimento do lado AB é igual a l , e a resistência por unidade de comprimento do fio é ρ .

Solução: Segue-se de considerações de simetria que o circuito inicial pode ser substituído por um equivalente (ver Fig 28). Substituímos o triângulo "interno" composto por um número

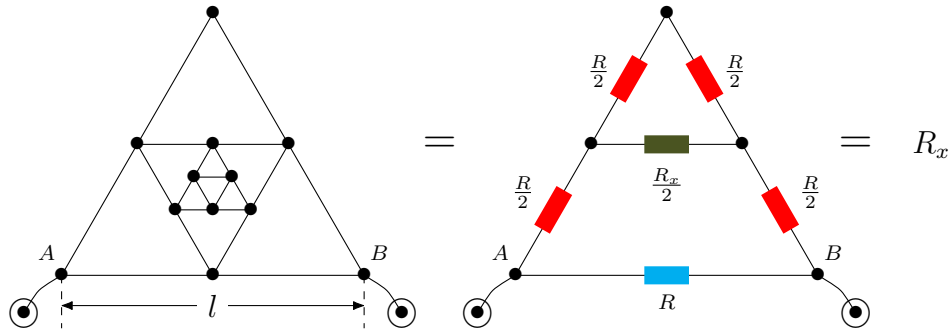


Fig 28. Circuito para o exemplo 2.8, conjunto de triângulos encaixados.

infinito de elementos por um resistor de resistência $R_{AB}/2$, onde a resistência $R_{AB} = R_x$, e a resistência do lado do triângulo é $R = l\rho$. Depois de algumas transformações simples obtemos que

$$R_x = \frac{R \left(R + \frac{RR_x/2}{R + R_x/2} \right)}{R + R + \frac{RR_x/2}{R + R_x/2}} = \frac{2(R^2 + RR_x)}{4R + 3R_x}, \quad (56)$$

ou seja que

$$R_x(4R + 3R_x) = 2(R^2 + RR_x) \quad \Rightarrow \quad 3R_x^2 + 2RR_x - 2R^2 = 0. \quad (57)$$

A solução da equação anterior respeito de R_x é também a solução do problema. Utilizando a solução geral da equação de segundo grau obtemos que $R_x = R(-1 \pm \sqrt{7})/3$. claramente a solução negativa não tem sentido físico, ou seja que a resistência medida entre os nós A e B será $R_{AB} = R_x = l\rho(\sqrt{7} - 1)/3$.

Finalmente vamos estudar sistemas que envolvem redes infinitas, onde podemos utilizar o princípio de superposição.

Exemplo 2.10. Uma rede infinita de fios, com células quadradas, é mostrada abaixo na Fig 29. A resistência de cada lado da célula menor é igual a R_0 . Encontre a resistência equivalente

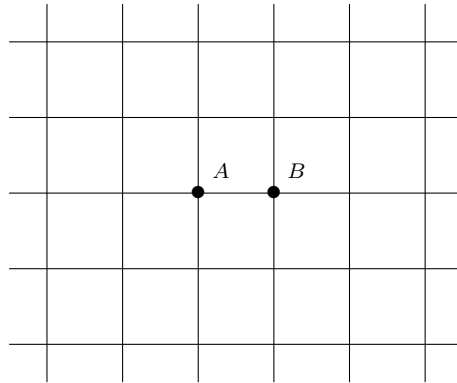


Fig 29. Rede resistiva infinita.

R , de toda a rede, entre os pontos A e B .

Solução: Vamos considerar que conectamos uma fonte de corrente nos terminais A e B . Vamos fazer o seguinte experimento mental. Seja que a corrente I é entregue no nó A , e ela é distribuída na rede. Como cada célula tem um lado de resistência R_0 , a distribuição é de fato isotrópica, ou seja, a corrente I é dividida no nó A em quatro correntes $I/4$. Suponha agora uma segunda situação onde a corrente I é extraída da rede no nó B . Novamente, dada a simetria do problema, é necessário que quatro correntes de intensidade $I/4$ confluam no nó B , para conseguir extrair a corrente I dele. Utilizando o princípio de superposição podemos escrever que

$$IR = R_0 \frac{I}{4} + R_0 \frac{I}{4} \Rightarrow R = \frac{R_0}{2}. \quad (58)$$

3 Circuitos não padronizados

3.1 Circuitos LC clássicos

Vamos começar pelo entendimento do funcionamento do circuito LC clássico. Os processos oscilatórios no circuitos LC são descritos por uma equação diferencial linear de segunda ordem, e a solução geral desta equação contém duas constantes desconhecidas. Estas constantes podem ser determinadas a partir das condições iniciais.

Bom, vamos achar a mencionada equação diferencial. Consideremos o circuito mostrado na Fig 30. Inicialmente a chave K esta aberta e a diferença de potencial nas placas do capacitor é φ_0 . A nossa tarefa é achar a dependência temporal da corrente do circuito após o fechamento da chave.

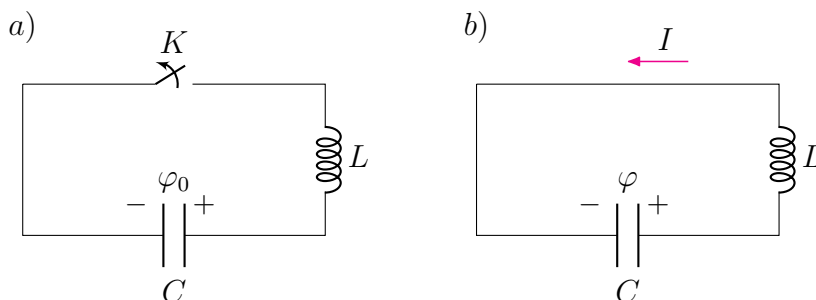


Fig 30. Esquema elétrico de oscilador harmônico simples.

Suponha que no tempo t a corrente I circula no circuito e a diferença de potencial nas placas do capacitor é φ , é claro que a diferença de potencial do capacitor e do indutor é a mesma, então temos que

$$LI = \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (59)$$

onde usamos que a carga do capacitor é $q = -\varphi C$ então $I = -C\dot{\varphi}$. Conhecemos também que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ é a frequência natural do sistema. A solução $\varphi(t)$ da equação (59) é bem conhecida, mas vale a pena deduzir ela pelo menos uma vez na vida. Suponha que a solução tem a forma $\varphi(t) = Ae^{\lambda t}$ onde A é uma constante, então podemos usar isso na equação (59) e obtemos

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + A\omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (60)$$

Então os possíveis valores de λ são $\pm j\omega_0$ onde $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária. Bom agora podemos escrever a solução geral como

$$\varphi(t) = Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t}, \quad (61)$$

o que inicialmente pode parecer artificial, mas resulta que ambos os membros da solução geral são solução da equação (59), o que pode ser facilmente verificado por substituição na equação diferencial, além de formar uma base do espaço onde moram todas as soluções da equação. O último significa que qualquer solução particular da equação (59) pode ser escrita na forma (61) com uma escolha certa das constantes A e B .

Exercício 3.1. Utilizando as identidade de Euler

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

mostre que a solução geral pode ser escrita como

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

onde A e B são uma redefinição das constantes da solução geral (61).

Utilizando a solução do exercício 3.1 podemos concluir que a carga e a corrente do circuito tem a forma

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ I(t) &= AC\omega_0 \sin(\omega_0 t) - BC\omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (62)$$

No instante inicial temos que $I(0) = 0$ e $\varphi(0) = \varphi_0$, então é claro que $A = \varphi_0$ e $B = 0$, ou seja que

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{e} \quad I(t) = \varphi_0 \omega_0 C \sin(\omega_0 t) \quad (63)$$

Comparando as duas últimas expressões, vemos que a tensão no capacitor e a corrente no circuito mudam de acordo com uma lei harmônica com a mesma frequência, mas as flutuações de corrente e tensão são defasadas em $\pi/2$. As dependências $\varphi(t)$ e $I(t)$ são mostradas na figura 31.

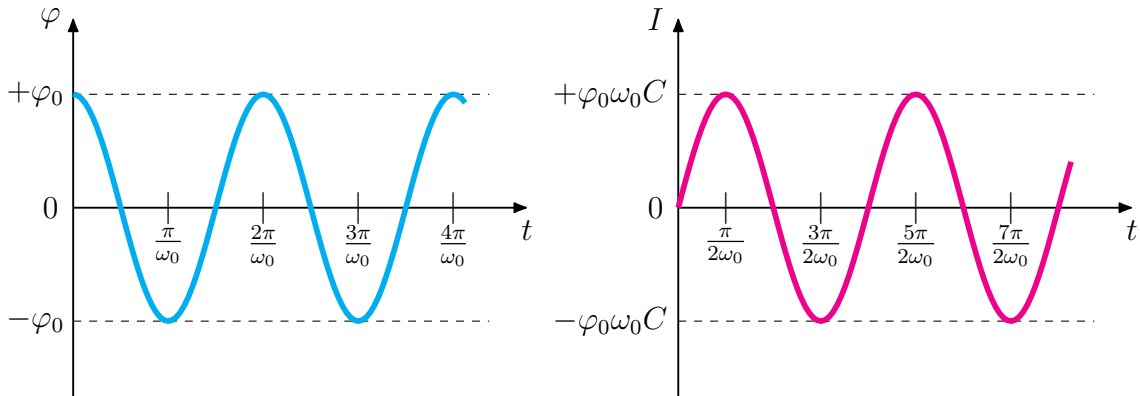


Fig 31. Diagramas de corrente e tensão para o oscilador harmônico.

Bom agora que conhecemos como funciona um circuito LC ideal vamos a estudar casos mais divertidos.

Exemplo 3.1. Uma fonte de fem \mathcal{E} constante com resistência interna desprezível é conectada ao circuito LC (Fig 32) no momento $t = 0$. Determine a tensão no capacitor em função do tempo.

Solução: Vamos considerar um momento arbitrário após o fechamento da chave. Deixe a corrente I fluir no circuito e φ ser a diferença de potencial nas placas do capacitor. Vamos escrever a lei de Ohm para o nosso circuito:

$$\mathcal{E} - L\dot{I} = \varphi. \quad (64)$$

Conhecemos que no capacitor

$$q = C\varphi \quad \Rightarrow \quad I = C\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = C\ddot{\varphi}, \quad (65)$$

então substituindo a expressão de \dot{I} na equação (64), obtemos

$$LC\ddot{\varphi} + \varphi = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\mathcal{E} \quad (66)$$

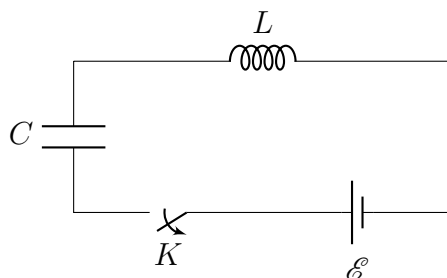


Fig 32. Circuito LC oscilante com uma bateria ou força externa

Bom ..., tudo foi perfeito ate aparecer a equação (66). Parece que estamos indo muito além dos objetivos de um curso de ensino médio, mas já sabemos como resolver a equação (59). Vamos considerar a mudança de variáveis $z = \varphi - \mathcal{E}$, como \mathcal{E} é constante temos que

$$\dot{z} = \dot{\varphi} \quad \text{e} \quad \ddot{z} = \ddot{\varphi}, \quad (67)$$

então em função da nova variável z obtemos

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad (68)$$

que já conhecemos que tem uma solução da forma

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (69)$$

Para determinar as constantes A e B utilizamos as condições iniciais do problema, ou seja, $\varphi(0) = 0$ e $I(0) = 0$. Em função da nova variável z estas condições podem ser escritas como $z(0) = -\mathcal{E}$ e $\dot{z}(0) = 0$, de onde obtemos $A = -\mathcal{E}$ e $B = 0$ e pelo tanto

$$z(t) = -\mathcal{E} \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) - \mathcal{E} = -\mathcal{E} \cos(\omega_0 t). \quad (70)$$

Utilizando trigonometria podemos concluir que a tensão no capacitor tem a forma

$$\varphi(t) = 2\mathcal{E} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right). \quad (71)$$

Exemplo 3.2. No circuito LC oscilatório mostrado na Fig 34, com a chave K aberta, a carga do capacitor com capacitância C_1 é igual a Q , e o capacitor com capacitância C_2 não está carregado. Quanto tempo depois de fechar a chave K a carga do capacitor de capacitância C_2 atingirá seu valor máximo? Qual é o valor de essa carga máxima? Despreze as perdas ôhmicas no indutor.

Solução: Vamos considerar um momento de tempo arbitrário após o fechamento da chave. Deixe neste momento a carga no primeiro capacitor q_1 , no segundo capacitor q_2 e a corrente

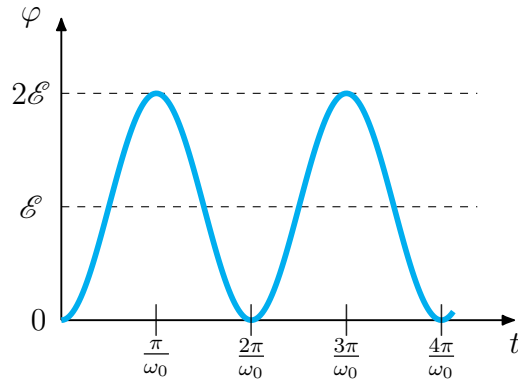


Fig 33. Esquema de tensão no capacitor.

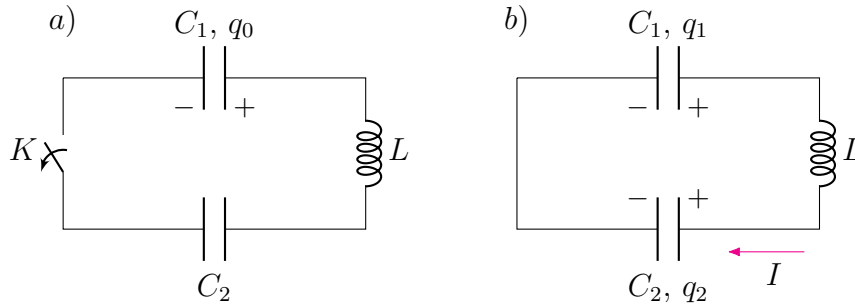


Fig 34. Capacitores em série conectados com um indutor. Na esquerda temos o problema inicial.

I fluindo no circuito. Como estamos interessados na carga $q_{2,\max}$, é razoável encontrar a dependência $q_2(t)$. Para fazer isso, vamos escrever a lei de Ohm para o nosso circuito:

$$-L\dot{I} = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1}.$$

Como $I = \dot{q}_2$ e $q_1 + q_2 = Q$, a equação para q_2 será

$$\ddot{q}_2 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L} q_2 = \frac{Q}{LC_1} \Rightarrow \ddot{q}_2 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L} \left(q_2 - \frac{QC_2}{C_1 + C_2} \right) = 0.$$

Vamos introduzir uma nova variável:

$$z = q_2 - \frac{QC_2}{C_1 + C_2},$$

então obtemos a equação

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0,$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}}$ é a frequência natural do circuito, e a sua solução é

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (72)$$

Conhecemos que em $t = 0$ temos $q_2 = 0$ ou seja $z(0) = -\frac{QC_2}{C_1 + C_2}$, também $I(0) = 0$ então $\dot{z}(0) = 0$, finalmente obtemos que $A = -\frac{QC_2}{C_1 + C_2}$ e $B = 0$. Logo temos

$$q_2(t) - \frac{QC_2}{C_1 + C_2} = -\frac{QC_2}{C_1 + C_2} \cos(\omega_0 t) \Rightarrow q_2(t) = -\frac{2QC_2}{C_1 + C_2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \quad (73)$$

Certamente o valor máximo de q_2 é atingido no tempo $t_1 = \pi/\omega_0$, então esse valor máximo se repetirá com um período $T = 2\pi/\omega_0$. Em geral, isso pode ser escrito como

$$t = t_1 + nT = \frac{\pi}{\omega_0} (2n + 1) \quad \text{onde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (74)$$

A carga máxima no segundo capacitor é igual a

$$q_{2,\max} = \frac{QC_2}{C_1 + C_2} \quad (75)$$

3.2 Capacitores com fuga de carga

Vamos considerar agora um capacitor com vazamento ou fuga de carga. Isto significa que uma pequena parte da carga que entra em uma das placas do capacitor passa através do dielétrico para a outra placa. Seja C a capacitância do capacitor, a resistência de fuga do dielétrico (meio entre as placas) é R_f , e que inicialmente o capacitor apresenta uma carga q_0 . Vamos estudar a descarga do capacitor mediante uma resistência externa R , como é apresentado na Fig 35.

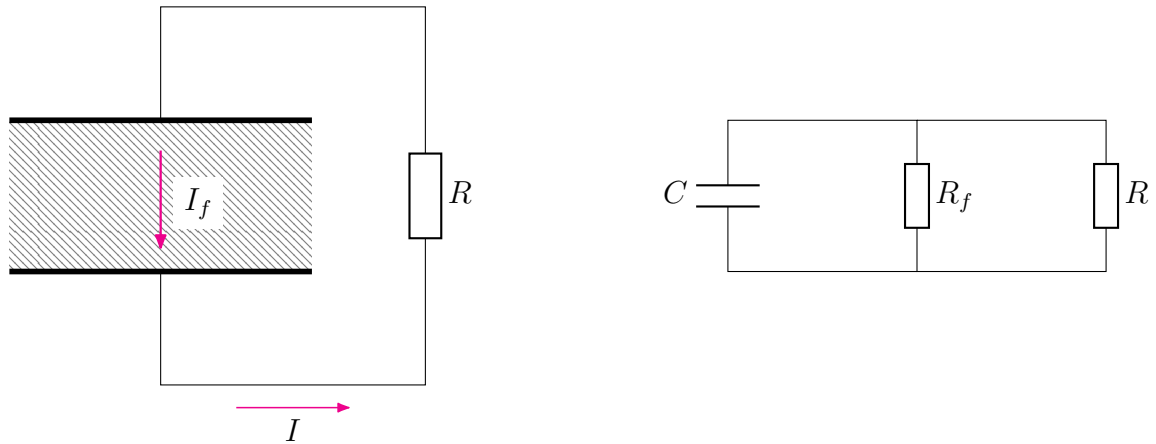


Fig 35. Esquema de capacitor com fugas e circuito equivalente.

A Fig 35 mostra o circuito não padrão considerado no problema, onde I é a corrente que flui pela resistência, e I_f é a corrente de fuga do capacitor. Igualando a tensão no capacitor à tensão na resistência, obtemos

$$\frac{q}{C} = IR. \quad (76)$$

Pela lei de conservação da carga obtemos que

$$-\dot{q} = I + I_f. \quad (77)$$

A resistência de fuga do capacitor pode ser entendida como um capacitor ideal de capacitância C e uma resistência R_f , ambos os elementos conectados em paralelo (ver Fig 35-direita), então é claro que

$$\frac{q}{C} = I_f R_f, \quad (78)$$

ou seja que juntando as equações anteriores obtemos

$$-\dot{q} = \frac{q}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_f} \right) = -\frac{q}{R_{eq}C}, \quad (79)$$

onde R_{eq} é a resistência equivalente do circuito elétrico. conhecemos que no instante inicial $q(0) = q_0$, então integrando a equação anterior obtemos

$$-\int_0^t \frac{dt'}{\tau} = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq'}{q'} \Rightarrow \ln \left[\frac{q(t)}{q_0} \right] = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow q(t) = q_0 e^{-t/\tau}. \quad (80)$$

Na equação (80) temos o parâmetro τ que caracteriza o tempo de descarga do capacitor, o tempo τ pode ser escrito como

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_{eq}C} = \frac{1}{RC} + \frac{1}{R_f C} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_f}, \quad (81)$$

onde $\tau_0 = 1/RC$ representa o tempo característico de descarga de um condensador ideal (sem fuga de cargas), o tempo $\tau_f = 1/R_f C$ é o tempo característico devido à fuga. Podemos concluir que a existência de fuga no condensador reduz a resistência equivalente do circuito, o que resulta em uma descarga mais rápida comparada ao caso ideal. O gráfico $q(t)$ é apresentado na Fig 36

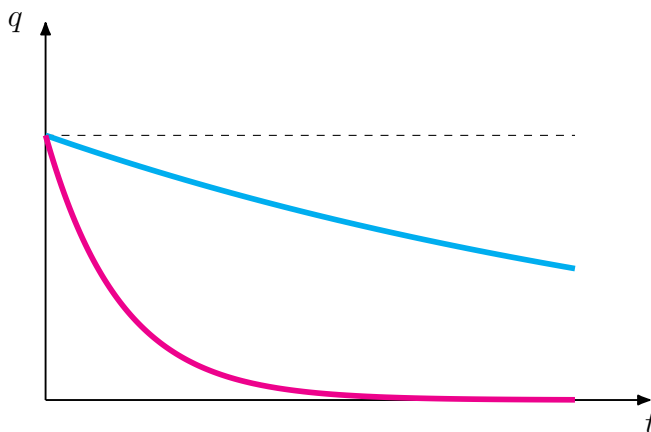


Fig 36. Variação da carga do capacitor em função do tempo

Agora vamos considerar que o capacitor com fuga de cargas está conectado com uma bobina de indutância L , ver Fig 37

Neste caso a lei de conservação da carga fornece uma equação do tipo

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (82)$$

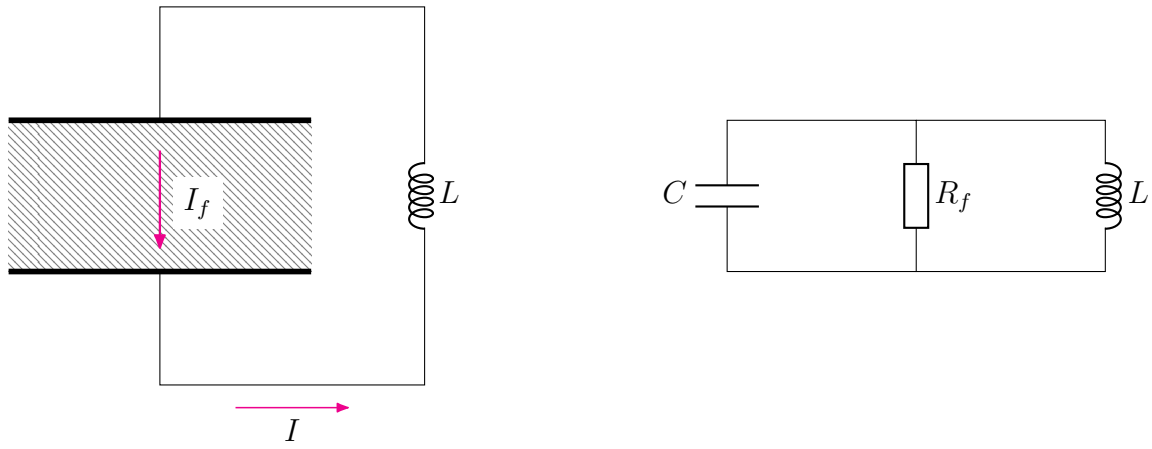


Fig 37. Circuito LC onde o capacitor apresenta fugas. Na direita temos o circuito ideal equivalente.

o que é interessante pois provavelmente o termo que contém a primeira derivada \dot{q} implica a existência de novos fenômenos físicos, mas por outro lado ainda não sabemos como resolver a equação diferencial, ou sim ...

Vamos procurar uma solução do tipo $q(t) = Ae^{\lambda t}$, onde A é uma constante, então obtemos

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta A\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 A e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (83)$$

onde adicionando e restando β^2 podemos escrever a equação na forma

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2 = \beta^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + \beta)^2 = \beta^2 - \omega_0^2 \quad (84)$$

de onde finalmente obtemos que $\lambda_1 = -\beta + j\omega$ e $\lambda_2 = -\beta - j\omega$. Na solução utilizamos que $\omega_0 \gg \beta$, e que $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Então a solução geral da equação é

$$q(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t) + Be^{-\beta t} \sin(\omega t). \quad (85)$$

No caso que estamos analisando $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = 0$, então obtemos que $A = q_0$ e $B = 0$, ou seja, a carga no capacitor varia de acordo com a lei

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t) \quad \text{onde} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (86)$$

3.3 Circuitos complexos

3.3.1 Diodo num circuito oscilante

No circuito da Fig 38, as bobinas com indutâncias L_1 e L_2 estão em curto-circuito através de um diodo ideal D . No momento inicial, a chave K está aberta e o capacitor C é carregado com a tensão φ_0 . Encontre a dependência das correntes através das bobinas no tempo após o fechamento da chave K e represente essas dependências no gráfico $I(t)$.

Imediatamente após a chave ser fechada, o diodo ficará bloqueado. Portanto, podemos assumir que a segunda bobina está desconectada do circuito, e o circuito operacional tem o formato mostrado na Fig 39. Deixe em um momento arbitrário uma corrente I_1 fluir através

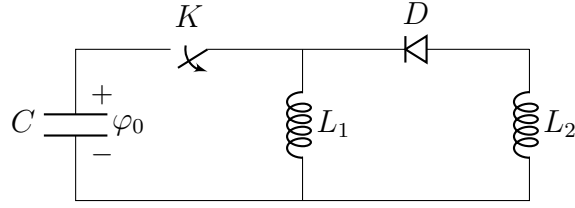


Fig 38. Circuito complexo com diodo ideal D , um capacitor e duas bobinas. Condição inicial.

da bobina com indutância L_1 , e a tensão no capacitor é igual a φ . A lei de Ohm para este circuito tem a forma

$$L_1 \dot{I}_1 = \varphi \Rightarrow L_1 \ddot{I}_1 = \dot{\varphi}. \quad (87)$$

A condição de conservação de carga nos permite escrever

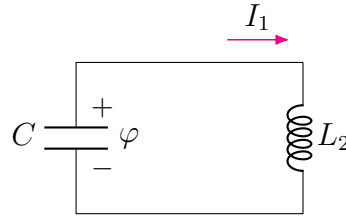


Fig 39. Funcionamento do diodo como circuito aberto

$$I_1 = -\dot{q} = -C\dot{\varphi} \quad (88)$$

Então utilizando as equações (87) e (88) obtemos

$$L_1 \ddot{I}_1 = -\frac{I_1}{C} \Rightarrow \ddot{I}_1 + \omega_1^2 I_1 = 0. \quad (89)$$

Esta equação descreve oscilações harmônicas da corrente I_1 com frequência $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C}$. Procuraremos uma solução para esta equação na forma

$$I_1(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) \quad (90)$$

onde A e B são constantes que encontramos nas condições iniciais. Imediatamente após fechar a chave ($t = 0$) $I_1(0) = 0$, do qual obtemos $A = 0$. A maneira mais fácil de encontrar a constante B é usar a lei da conservação da energia. Na corrente máxima I_1 ($I_{1,\max} = B$) a tensão no capacitor é zero, então

$$\frac{L_1 B^2}{2} = \frac{C \varphi_0^2}{2} \Rightarrow B = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}}. \quad (91)$$

Então a dependência $I_1(t)$ terá a forma

$$I_1(t) = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}} \sin(\omega_1 t). \quad (92)$$

A corrente através do indutor L_2 será obviamente zero até que a corrente I_1 atinja seu máximo e a tensão através do capacitor se torne zero. Isso acontecerá durante um quarto

período, ou seja, intervalo de tempo $0 \leq t \leq T_1/4$ (aqui $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{L_1C}$ é o período de oscilação). Assim que a tensão no capacitor começar a aumentar, mas com sinal diferente, o diodo se abrirá e a corrente fluirá pela bobina de indutância L_2 . O circuito de trabalho terá o formato mostrado na Fig 40. O início da contagem do tempo estará associado ao momento em que a corrente máxima for atingida pela primeira bobina. Deixe em um momento arbitrário as

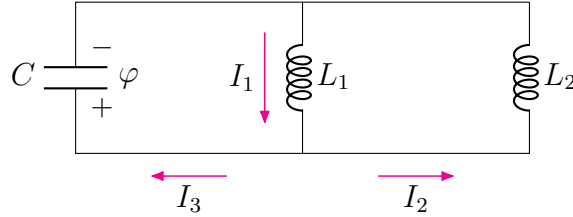


Fig 40. Funcionamento do diodo como circuito fechado.

correntes através das bobinas serem iguais a I_1 e I_2 , a corrente que flui através do capacitor é I_3 e a tensão através do capacitor é igual a φ . Vamos escrever a lei de Ohm para um circuito que cobre duas bobinas:

$$L_1\dot{I}_2 + L_2\dot{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1I_1 + L_2I_2 = \text{const.} \quad (93)$$

Como no momento inicial selecionado $I_1(0) = \varphi_0\sqrt{C/L_1}$ e $I_2(0) = 0$, obtemos que a constante da equação (93) é $I_1(0)L_1 = \varphi_0\sqrt{L_1C}$, então a equação pode ser escrita como

$$L_1I_1 + L_2I_2 = \varphi_0\sqrt{L_1C}. \quad (94)$$

Agora vamos escrever a lei de Ohm para o circuito que envolve o capacitor e a bobina de indutância L_1 :

$$-L_1\dot{I}_1 = \varphi. \quad (95)$$

De acordo com a lei da conservação da carga, podemos escrever

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \text{e} \quad I_3 = C\dot{\varphi}. \quad (96)$$

Do sistema das últimas quatro equações, por exclusão mútua, obtemos uma equação para a corrente I_1

$$I_1 = \frac{1}{L_2} \left(\varphi_0\sqrt{L_1C} - L_1I_1 \right) - L_1C\ddot{I}_1, \quad (97)$$

ou seja que,

$$L_1C\ddot{I}_1 + \left(1 + \frac{L_1}{L_2} \right) I_1 = \frac{\varphi_0\sqrt{L_1C}}{L_2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{I}_1 + \frac{L_1 + L_2}{L_1L_2C} I_1 = \frac{\varphi_0}{L_2\sqrt{L_1C}}. \quad (98)$$

Esta equação não homogênea também descreve oscilações harmônicas da corrente I_1 , mas com uma nova frequência $\omega_2 = \sqrt{(L_1 + L_2)/L_1L_2C}$. A presença no lado direito da equação não de um termo zero, mas de alguma constante (independente do tempo) significa que ocorrerão oscilações harmônicas da corrente em relação não ao nível zero, mas a algum valor da corrente. Se escrevemos a equação (98) na forma

$$\ddot{I}_1 + \omega_2^2 \left(I_1 - \frac{\varphi_0}{\omega_2^2 L_2 \sqrt{L_1 C}} \right) = 0, \quad (99)$$

ou seja

$$\ddot{I}_1 + \omega_2^2 \left(I_1 - \frac{\varphi_0 \sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2} \right) = 0. \quad (100)$$

Então é claro que o valor médio da corrente I_1 será $\frac{\varphi_0 \sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2}$. A solução da equação (100) tem a forma

$$I_1(t) = A \cos(\omega_2 t) + B \sin(\omega_2 t) + \frac{\varphi_0 \sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2}. \quad (101)$$

Conhecemos que no instante inicial $I_1(0) = \varphi_0 \sqrt{C/L_1}$ e $\dot{I}_1(0) = 0$ então

$$A = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}} - \frac{\varphi_0 \sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2} = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}} \left(1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right) = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}} \left(\frac{L_2}{L_1 + L_2} \right) \quad (102)$$

além de que $B = 0$.

A dependência final $I_1(t)$ terá a forma

$$I_1(t) = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}} \left(\frac{L_2}{L_1 + L_2} \right) \cos(\omega_2 t) + \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}} \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right). \quad (103)$$

A corrente $I_2(t)$ é dada pela expressão

$$I_2(t) = 2\varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}} \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right) \sin^2 \left(\frac{\omega_2 t}{2} \right). \quad (104)$$

Lembremos que nas dependências obtidas $I_1(t)$ e $I_2(t)$ o tempo é contado a partir do momento $t = T_1/4$ após o fechamento da chave. A dependência completa (a partir do momento em que a chave é fechada) das correntes I_1 e I_2 é mostrada na Fig 41.

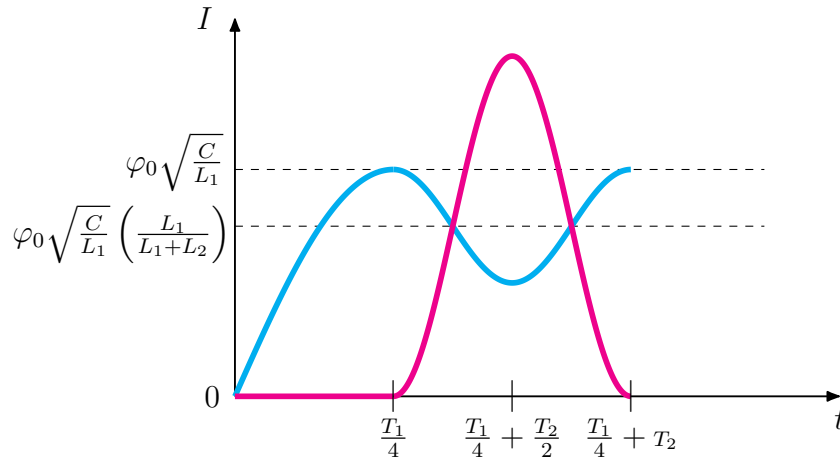


Fig 41. Diagrama para correntes

3.3.2 Oscilações não sinusoidais

Vamos considerar um capacitor plano com dimensões das armaduras $l_1 \times l_2$ e distância entre elas d ($d \ll l_1$, $d \ll l_2$). Seja que foi introduzido completamente uma placa dielétrica de massa m e permeabilidade ε , que, justamente, ocupa todo o espaço entre as armaduras. A tensão constante φ é mantida no capacitor. A placa dielétrica se move ao longo do lado de comprimento l_1 até a distância x_0 e é liberada. Descreva a evolução do sistema em função do tempo.

Bom ..., a realidade é que o problema planteado aparenta ser mais mecânico que elétrico. Vamos primeiramente achar como varia o deslocamento da placa dielétrica em função do tempo, ou seja, $x(t)$. Seja que no tempo t , após a placa ser liberada, o extremo está numa distância x fora do capacitor (ver Fig 42). Eletricamente o capacitor complexo pode ser entendido como dois capacitores conectados em paralelo. O primeiro capacitor não tem dielétrico e a área das armaduras é $S_x = xl_2$. O segundo capacitor tem um dielétrico de permitividade ε e a área das armaduras é $S_{l_1-x} = (l_1 - x)l_2$

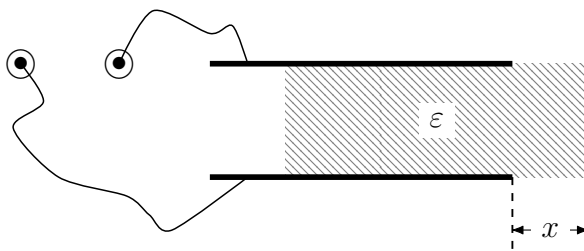


Fig 42. Esquema de capacitor com dielétrico em movimento quase-estacionário.

A capacidade de cada um dos capacitores é

$$C_x = \frac{\varepsilon_0 S_x}{d} = \frac{\varepsilon_0 x l_2}{d} \quad \text{e} \quad C_{l_1-x} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S_{l_1-x}}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (l_1 - x) l_2}{d}, \quad (105)$$

então a capacidade do capacitor equivalente (capacitor complexo) é

$$C(x) = C_x + C_{l_1-x} = \frac{\varepsilon_0 x l_2}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (l_1 - x) l_2}{d} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) x l_2}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l_1 l_2}{d}. \quad (106)$$

Agora podemos achar a energia do capacitor complexo, levando em consideração que o potencial nas armaduras, φ , é uma constante, é lógico utilizar a expressão

$$U(x) = \frac{C(x) \varphi^2}{2} \quad (107)$$

Vamos considerar que após o tempo Δt , o extremo está numa distância $x - \Delta x$ fora do capacitor, então a variação da capacidade do condensador é

$$\Delta C = C(x - \Delta x) - C(x) = -\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) l_2}{d} \Delta x, \quad (108)$$

e a variação de energia elétrica do condensador é

$$\Delta U = U(x - \Delta x) - U(x) = \frac{\Delta C \varphi^2}{2} = -\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) l_2 \varphi^2}{2d} \Delta x, \quad (109)$$

Finalmente a força elétrica tem a forma

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) l_2 \varphi^2}{2d}. \quad (110)$$