ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

A Desigualdade de Cauchy em Problemas de Física

São Paulo | 8 de Agosto de 2024.

Resumo

Estas notas foram criadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP).

Vamos supor a seguinte situação: temos os números não negativos a e b, então é claro para qualquer estudante de ensino médio que a quantidade $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$, ou também podemos escrever que

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, \tag{1}$$

ou, de uma forma historicamente mais interessante

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{2}$$

A média aritmética de dois números não negativos a e b não é menor que sua média geométrica, e a igualdade é alcançada quando $a = b$. Essa desigualdade é chamada de desigualdade de *Cauchy*. É útil conhecer algumas de suas consequências.

- O produto de duas variáveis não negativas cuja soma é constante tem o maior valor quando essas variáveis são iguais entre si.
- O menor valor da soma de duas variáveis não negativas, cujo produto é constante, é alcançado quando as variáveis são iguais.

Consideremos a aplicação da desigualdade de Cauchy na resolução de problemas específicos de física.

Exemplo 1. Com que velocidade inicial mínima $v_{0,\min}$ uma pedra deve ser atirada formando um ângulo α com a horizontal, de modo que atinja uma altura h? Qual é o tempo t para a pedra atingir esta altura?

Solução: Alinhemos a origem do eixo vertical OY com o ponto de lançamento. Então a equação para o movimento vertical da pedra terá a forma

$$y(t) = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{gt^2}{2}. \tag{3}$$

No momento de tempo $t = \tau$, em que a pedra está na altura especificada, $y(\tau) = h$. Vamos expressar a velocidade inicial v_0 da equação do movimento

$$v_0 = \frac{g\tau}{2\sin(\alpha)} + \frac{h}{\tau \sin(\alpha)}. \tag{4}$$

Neste caso v_0 pode ser interpretado como una variável dependente do parâmetro τ, então aplicando a desigualdade de Cauchy obtemos que

$$v_0 \geqslant 2\sqrt{\left(\frac{g\tau}{2\sin(\alpha)}\right) \cdot \left(\frac{h}{\tau\sin(\alpha)}\right)} = \sqrt{\frac{2gh}{\sin^2(\alpha)}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin(\alpha)}. \tag{5}$$

A partir daqui encontramos a velocidade inicial mínima da pedra:

$$v_{0,\min} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin(\alpha)}, \tag{6}$$

e o mínimo é alcançado sob a condição

$$\frac{g\tau}{2\sin(\alpha)} = \frac{h}{\tau\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{7}$$

Exemplo 2. Um patinador percorre uma distância $l = 500$ m com velocidade constante v e depois desacelera com uma aceleração $a = 0.05$ m/s^2. A que velocidade v é o tempo que o patinador se move para parar o mínimo possível?

Solução: O tempo de movimento obviamente consiste em dois termos: o tempo de movimento em velocidade constante e o tempo de movimento com aceleração constante até a parada completa:

$$t = \frac{l}{v} + \frac{v}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{l}{v} \cdot \frac{v}{a}} = 2\sqrt{\frac{l}{a}}. \tag{8}$$

Claramente o menor tempo de frenado sera

$$t_{\min} = 2\frac{l}{a} = 200 \text{ s} \approx 3.3 \text{ horas} \tag{9}$$

o qual é conseguido se

$$\frac{l}{v} = \frac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{la} = 5 \text{ m/s}. \tag{10}$$

Exemplo 3. Uma pequena bola cai livremente do ponto A sobre uma placa maciça orientada em um ângulo $\alpha = \pi/4$ em relação ao horizonte (Fig 1). Após a reflexão elástica na placa, a bola cai na superfície da Terra no ponto C a uma distância l da linha vertical AB. A que

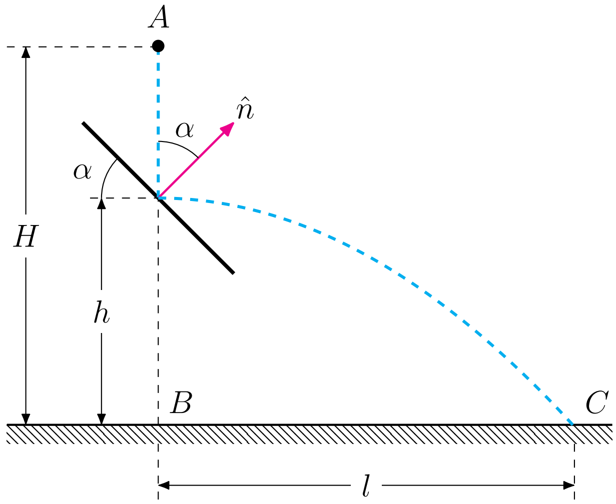

Fig 1. Esquema para solução do exemplo 3.

altura h deve ser colocada a placa (sem alterar a sua orientação) para que a distância l seja máxima, se $AB = H$? A que é igual a distância $l_{\max}$? Despreze a resistência do ar.

Solução: Com base na lei da conservação da energia, determinamos a velocidade da bola antes de atingir a placa:

$$\frac{mv^2}{2} = mg\,(H - h) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\,(H - h)}. \tag{11}$$

Após o impacto, a velocidade absoluta da bola permanecerá inalterada, mas a direção mudará para horizontal. Horizontalmente a bola voará uma distância $l = vt$, onde t é o tempo que a bola cai no chão após o impacto, e verticalmente $h = gt^2/2$. Então

$$l = \sqrt{2g\,(H - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H - h)} \leqslant h + (H - h) = H. \tag{12}$$

Se a soma dos termos for constante, então a média geométrica atinge o máximo quando os fatores são iguais:

$$h = H - h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{H}{2}. \tag{13}$$

Exemplo 4. Dados n elementos galvânicos iguais (ver Fig 2) com força eletromotriz $\mathscr{E}$ e resistência interna r. Todos os elementos são conectados em k grupos de n/k elementos em um grupo, e em cada grupo os elementos são conectados em paralelo e os grupos são conectados entre si em série. Qual deve ser igual a k para obter a corrente máxima na resistência externa R?

Solução: Sabendo que quando elementos semelhantes são conectados em paralelo, a força eletromotriz não muda e a resistência interna diminui proporcionalmente ao número de elementos, descobrimos que cada grupo pode ser substituído por um elemento com força eletromotriz $\mathscr{E}$ e resistência interna kr/n. Além disso, levando em consideração que com uma conexão em série a força eletromotriz e a resistência interna aumentam proporcionalmente

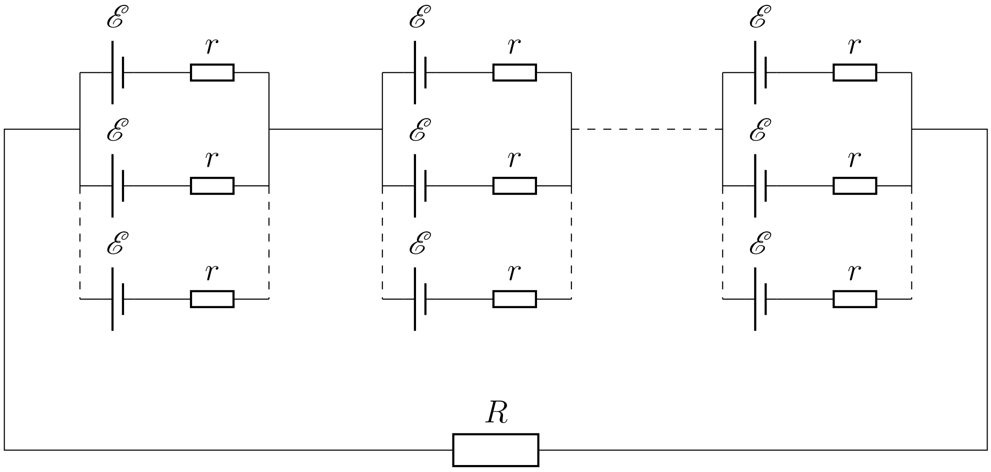

Fig 2. Circuito complexo que representa as conexões descritas no exemplo 4.

ao número de elementos, obtemos que no circuito a força eletromotriz será $k\mathscr{E}$ e a resistência interna k^2r/n. De acordo com a lei de Ohm para um circuito completo, a corrente no circuito é igual a

$$I = \frac{k\mathscr{E}}{\left(\dfrac{k^2r}{n}\right) + R} = f(k)\mathscr{E} \quad \text{onde} \quad f(k) = \frac{1}{\dfrac{kr}{n} + \dfrac{R}{k}}. \tag{14}$$

Obviamente, a maior intensidade de corrente estará no valor k no qual a função $f(k)$ assume o maior valor. Com base na desigualdade de Cauchy, teremos que

$$\frac{kr}{n} + \frac{R}{k} \geqslant 2\sqrt{\frac{kr}{n} \cdot \frac{R}{k}} = 2\sqrt{\frac{Rr}{n}} \quad \Rightarrow \quad f(k) = \frac{1}{\dfrac{kr}{n} + \dfrac{R}{k}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{.}Rr}, \tag{15}$$

então teramos que

$$\max_k \{f(k)\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{Rr}} \quad \Rightarrow \quad I_{\max} = \max_k \{f(k)\}\, \mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}}{2}\sqrt{\frac{n}{Rr}}. \tag{16}$$

Neste caso temos que o valor de k que cumpre a igualdade é

$$\frac{kr}{n} = \frac{R}{k} \quad \Rightarrow \quad k\sqrt{\frac{nR}{r}}. \tag{17}$$

Gostaria de saber qual é a resistência interna da bateria neste caso? Como vimos, existe

$$r_t = \frac{rk^2}{n} = r\frac{nR}{nr} = R. \tag{18}$$

Assim, chegamos à seguinte conclusão importante: a corrente da bateria é máxima quando a sua resistência interna é igual à sua resistência externa.

Exemplo 5. (*XLI Olimpíada de Toda a Rússia para alunos de física*). Um trem de passageiros de comprimento l estava no primeiro trilho (ocupando o segmento $\overline{CB}$). Na última carruagem, ponto C, estava o tio Fyodor (o herói do livro “Férias em Prostokvashino” de E. Uspensky) e esperava por uma carta que Sharik deveria lhe entregar do gato Matroskin. No momento em que o trem começou a se mover, Sharik apareceu na praça da estação em frente ao primeiro vagão. Ele determinou que a distância até o último vagão é L. A que velocidade mínima $v_{0,\min}$ o Sharik deve correr para entregar a carta se o trem estiver se movendo com aceleração constante a?

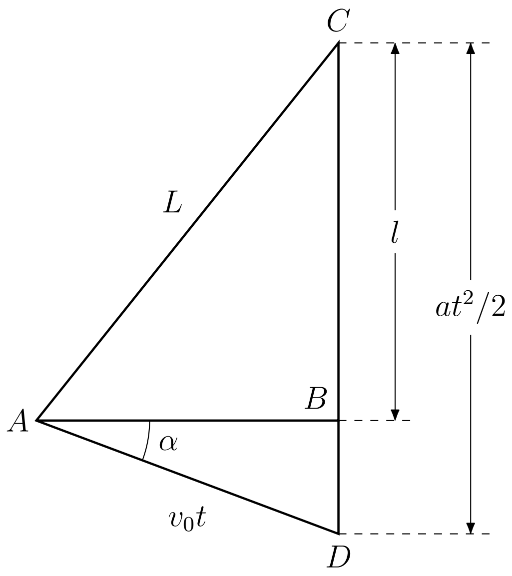

Fig 3. Esquema geométrico para o exemplo 5.

Solução: Deixe o encontro de Sharik com o último carro ocorrer no ponto D (Fig 3). Os triângulos ABC e ABD são retangulares. Então, usando o teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DB}^2,$$

então

$$L^2 - l^2 = v_0^2 t^2 - \left(\frac{at^2}{2} - l\right)^2. \tag{19}$$

A partir daqui expressamos o quadrado da velocidade inicial:

$$v_0^2 = \frac{L^2}{t^2} + \frac{a^2t^2}{4} - al = f(t) - al \quad \text{onde} \quad f(t) = \frac{L^2}{t^2} + \frac{a^2t^2}{4}. \tag{20}$$

Para que a velocidade v_0 seja mínima é necessário que a função $f(t)$ assuma um valor mínimo. Pela desigualdade de Cauchy obtemos

$$\frac{L^2}{t^2} + \frac{a^2t^2}{4} \geqslant 2\sqrt{\frac{L^2}{t^2} \cdot \frac{a^2t^2}{4}} = aL \quad \Rightarrow \quad \max_t \{f(t)\} = aL, \tag{21}$$

então temos que

$$v_{0,\max}^2 = \max_t \{f(t)\} - al \quad \Rightarrow \quad v_{0,\max} = \sqrt{a(L-l)}. \tag{22}$$

Observe que a velocidade mínima é alcançada sob condições

$$\frac{L^2}{t^2} = \frac{a^2t^2}{4} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{at^2}{2}. \tag{23}$$

Isso significa $DC = CA = L$, ou seja, o triângulo ACD é isósceles e

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{L-l}{\sqrt{L^2-l^2}}. \tag{24}$$

Descobrimos que Sharik deveria correr em ângulo

$$\alpha = \arctan\left(\frac{L-l}{\sqrt{L^2-l^2}}\right) \tag{25}$$

respeito à linha $\overline{AB}$ com a velocidade $v_{0,\min} = \sqrt{a(L-l)}$.

Exemplo 6. Determine em qual coeficiente de atrito mínimo μ uma haste fina e homogênea no chão pode uma pessoa levantá-la lentamente do chão até a posição vertical sem escorregar, aplicando uma força perpendicular à extremidade da haste.

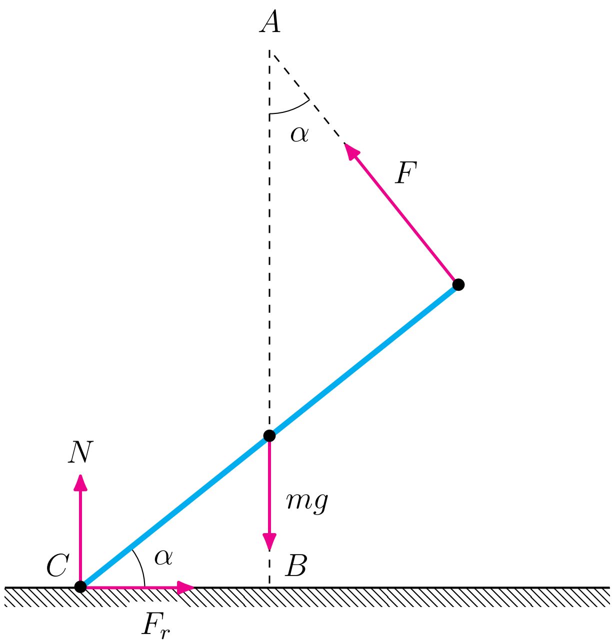

Fig 4. Esquema para solução do exemplo 6

Solução: Encontremos a dependência do valor mínimo do coeficiente de atrito $\mu = F_r/N$, onde N é a força de reação vertical do piso, na qual não haverá escorregamento, com o ângulo de levantamento da haste α (Fig 4). Como eixo de rotação, tomamos o ponto A da intersecção das linhas ao longo das quais atuam as forças $\vec{F}$ e $m\vec{g}$. Em relação ao ponto A, os momentos da força aplicada $\vec{F}$ e da força da gravidade $m\vec{g}$ são iguais a zero, pois os braços dessas forças são iguais a zero. Vamos determinar o braço da força de atrito F_r, ou seja, comprimento do segmento AB. Seja o comprimento da haste l, então

$$\overline{AB} = \frac{l}{2}\sin(\alpha) + \frac{l}{2\sin(\alpha)} = \frac{l}{2}\left[\sin(\alpha) + \frac{1}{\sin(\alpha)}\right]. \tag{26}$$

O braço de força de reação $\vec{N}$ é o segmento $\overline{CE}$:

$$\overline{CB} = \frac{l}{2}\cos(\alpha). \tag{27}$$

Vamos anotar a condição de equilíbrio da haste em relação ao ponto A selecionado:

$$N\frac{l}{2}\cos(\alpha) = F_r\frac{l}{2}\left[\sin(\alpha) + \frac{1}{\sin(\alpha)}\right]. \tag{28}$$

então temos que

$$\mu = \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha)+1} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)}{2\tan^2(\alpha)+1}, \tag{29}$$

ou seja

$$\mu = f(\alpha) \quad \text{onde} \quad f(\alpha) = \frac{1}{2\tan(\alpha) + \dfrac{1}{\tan(\alpha)}}. \tag{30}$$

Uma fração assume seu valor máximo quando o denominador é mínimo. Vamos usar a desigualdade de Cauchy:

$$2\tan(\alpha) + \frac{1}{\tan(\alpha)} \geqslant 2\sqrt{2\tan(\alpha)\cdot\frac{1}{\tan(\alpha)}} = 2\sqrt{2}. \tag{31}$$

Então $f(\alpha) \leqslant 1/2\sqrt{2} \Rightarrow \mu_{\min} = \sqrt{2}/4$.

Exemplo 7. Qual é o ângulo máximo θ de espalhamento elástico de uma partícula α em um Deuteron? Deuteron é o núcleo do isótopo de hidrogênio deutério, consiste em um próton e um nêutron, a partícula α é um núcleo de hélio, consiste em dois prótons e dois nêutrons. Considere que a massa do deutério é metade da massa da partícula α.

Solução: Sejam m_1 e m_2 as massas da partícula α e do deutério, respectivamente, v_0 e v_1 sejam as velocidades da partícula α antes e depois da colisão, v_2 sejam a velocidade do deutério após a colisão, δ e φ sejam os ângulos de desvio da partícula α e do deutério da direção do movimento da partícula α antes da colisão (Fig. 6). Vamos escrever a lei da conservação do momento nas projeções nas direções horizontal e vertical

$$m_1v_0 = m_1v_1\cos(\delta) + m_2v_2\cos(\varphi), \tag{32}$$

$$m_1v_1\sin(\delta) = m_2v_2\sin(\varphi). \tag{33}$$

onde utilizando que $m_1 = km_2$ com $k > 1$ (na verdade $k \approx 2$, mas deixemos o problema em função de k para que possamos nos divertir mais) obtemos que

$$kv_0 = kv_1\cos(\delta) + v_2\cos(\varphi), \tag{34}$$

$$kv_1 \sin(\delta) = v_2 \sin(\varphi). \tag{35}$$

Vamos nos livrar do ângulo φ. Para fazer isso, a partir da primeira igualdade expressamos $v_2 \cos(\varphi)$ e elevamos ao quadrado, após o que o adicionamos ao quadrado da segunda igualdade:

$$v_2^2 = k^2 v_1^2 \sin^2(\delta) + k^2 [v_0 - v_1 \cos(\delta)]^2 = k^2 v_1^2 + k^2 v_0^2 - 2k^2 v_0 v_1 \cos(\delta), \tag{36}$$

ou seja que

$$v_2^2 = k^2 \left(v_0^2 + v_1^2\right) - 2k^2 v_0 v_1 \cos(\delta). \tag{37}$$

Agora aplicamos a lei da conservação da energia:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad k v_0^2 = k v_1^2 + v_2^2. \tag{38}$$

Agora vamos nos livrar de v_2, então pela lei da conservação do momento linear e a lei da conservação da energia obtemos que

$$k^2 \left(v_0^2 + v_1^2\right) - 2k^2 v_0 v_1 \cos(\delta) = k \left(v_0^2 - v_1^2\right), \tag{39}$$

simplificando em k obtemos que

$$2k v_0 v_1 \cos(\delta) = k \left(v_0^2 + v_1^2\right) - \left(v_0^2 - v_1^2\right) = (k-1)v_0^2 + (k+1)v_1^2, \tag{40}$$

Finalmente obtemos que

$$\cos(\delta) = \left(\frac{k-1}{2k}\right)\frac{v_0}{v_1} + \left(\frac{k+1}{2k}\right)\frac{v_1}{v_0}. \tag{41}$$

Como $k > 1$ e $v_0/v_1 > 0$ (ai igual que v_1/v_0) então podemos utilizar a desigualdade de Cauchy neste problema, então

$$\cos(\delta) \geqslant 2\sqrt{\left(\frac{k-1}{2k}\right)\frac{v_0}{v_1} \cdot \left(\frac{k+1}{2k}\right)\frac{v_1}{v_0}} = 2\sqrt{\frac{k^2-1}{4k^2}} = \sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}}, \tag{42}$$

então temos que $k^2 \cos^2(\delta) \geqslant k^2 - 1$, ou seja que $k^2 - k^2 \sin^2(\delta) \geqslant k^2 - 1$, simplificando k^2 e trocando o sinal obtemos que $\sin^2(\delta) \leqslant 1/k^2$, ou seja

$$\sin(\delta) \leqslant \frac{1}{k} = \frac{m_2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \delta_{\min} = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \tag{43}$$

No caso de $k = 2$ obtemos que $\delta_{\min} = \pi/6$.