ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas

Equação de Equilíbrio Térmico e Transições de Fases

São Paulo | 15 de Agosto de 2024.

Resumo

Estas notas foram traduzidas do russo e modificadas por William G C Oropesa, responsável do Programa ICTP-SAIFR de Introdução à Física para Participação em Olimpíadas (Núcleo IFT-UNESP). O artigo original corresponde a А.ЧЕРНОУЦАН do jornal КВАНТ (N° 02-2015).

A equação do equilíbrio de calor é um registro da lei de conservação de energia para um sistema termicamente isolado de vários corpos que inicialmente tinham temperaturas diferentes e foram colocados em contato térmico entre si. Como resultado da troca de calor, todos os corpos do sistema adquirem a mesma temperatura, após a qual a troca de calor é interrompida, ou seja, o sistema atinge um estado de equilíbrio térmico. A temperatura de equilíbrio térmico será denotada por $t^\star$.

Escreveremos a equação do balanço de calor na forma

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = 0, \tag{1}$$

além disso, a quantidade de calor Q_i é considerada positiva se o i-ésimo corpo receber calor, e negativa se o i-ésimo corpo emitir calor. Todas as quantidades negativas de calor podem ser transferidas para o lado direito da igualdade, ou seja, escreva a equação do balanço de calor na forma “a soma das quantidades de calor recebidas é igual à soma das quantidades distribuídas”. A escolha da forma de gravação é uma questão de gosto, mas, como veremos, a forma que escolhemos tem um maior grau de automatismo.

As fórmulas para calcular a quantidade de calor têm diferentes formas dependendo do processo de transferência de calor.

1. Ao aquecer ou resfriar um sólido ou líquido

$$Q = C\Delta t = C(t_2 - t_1), \tag{2}$$

onde C é a capacidade calorífica do corpo (dimensão da capacidade calorífica $[C] = \mathrm{J/K}$). Para corpos homogêneos (consistindo em uma substância)

$$Q = cm\Delta t = cm(t_2 - t_1), \tag{3}$$

onde c é a capacidade calorífica específica da substância que compõe o corpo ($[c]$ = J /kg· K). As capacidades térmicas específicas de várias substâncias podem ser encontradas em livros de referência. A capacidade térmica de um corpo inteiro é normalmente utilizada se for composto de materiais diferentes. Para um corpo homogêneo $C = mc$. Observe que se t_1 for a temperatura inicial e t_2 for a temperatura final, então a regra do sinal para Q é satisfeita automaticamente. A segunda observação importante: as temperaturas não precisam ser convertidas de graus Celsius para graus Kelvin, uma vez que as equações incluem apenas diferenças de temperatura.

2. Se durante a transição para um estado de equilíbrio térmico ocorre uma transformação de fase com algum dos corpos, então este corpo, a uma temperatura constante, recebe (emite) uma quantidade de calor proporcional à massa da substância que sofreu a transformação de fase. Supõe-se que todos os processos de transformação de fase ocorrem à pressão atmosférica. Quando uma substância sólida derrete (cristalização líquida), que ocorre no ponto de fusão, o corpo recebe (emite) uma quantidade de calor

$$Q = \pm\lambda m, \tag{4}$$

onde λ é o calor específico de fusão ($[\lambda]$ = J/kg), o sinal "+" corresponde à fusão, o sinal "−" corresponde à cristalização. Durante a evaporação de um líquido (condensação de vapor), que ocorre em equilíbrio no ponto de ebulição (temperatura de equilíbrio entre líquido e vapor à pressão atmosférica), o corpo recebe (emite) uma quantidade de calor

$$Q = \pm rm \tag{5}$$

onde r é o calor específico de vaporização ($[r]$ = J/kg), o sinal "+" corresponde à evaporação, o sinal "−" corresponde à condensação.

Para água (que está presente na maioria dos problemas) temos que $c = 4.2 \cdot 10^3$ J/kg·K, $\lambda = 3.3 \cdot 10^5$ J/kg, $r = 2.3 \cdot 10^6$ J/kg, ponto de fusão 0 °C, ponto de ebulição 100 °C, capacidade calorífica específica do gelo $c_h = 2.1 \cdot 10^3$ J/kg·K.

E uma última observação antes de passarmos à análise dos problemas. As fórmulas (2)–(5) permitem-nos calcular a quantidade de calor fornecida ao corpo no processo correspondente a pressão (atmosférica) constante. Em alguns problemas (por exemplo, a transição de energia mecânica em energia interna) é necessário usar fórmulas para alterar a energia interna em vários processos. Essas fórmulas diferem pela quantidade de trabalho realizado contra a pressão atmosférica por um corpo quando seu volume muda. Por exemplo, quando um corpo é aquecido por Δt, a mudança em seu volume é igual a $\Delta V = \beta V \Delta t$, onde β é o coeficiente de expansão volumétrica, portanto a mudança na energia interna é igual a

$$\Delta U = Q - p_0 \Delta V = cm\Delta t - p_0 \beta \frac{m}{\rho} \Delta t = \left(c - \frac{p_0 \beta}{\rho}\right) m \Delta t \tag{6}$$

É fácil verificar que a correção da capacidade térmica não passa de um centésimo de um por cento. Durante a fusão, a mudança no volume está associada à diferença nas densidades do líquido e do sólido:

$$\Delta U = Q - p_0 \Delta V = \lambda m - p_0 \left(\frac{m}{\rho_l} - \frac{m}{\rho_s}\right), \tag{7}$$

e a alteração a λ não é superior a um décimo de por cento. Para o processo de vaporização a correção é mais significativa. Desprezando o volume de líquido em comparação com o volume de vapor, obtemos

$$\Delta U = Q - p_0 \Delta V = rm - p_0 V_v = m\left(r - \frac{RT}{\mu}\right) \tag{8}$$

A correção para r pode ser de vários por cento (para água aproximadamente 7%).

O mais importante para nós é que a equação da lei de conservação de energia para processos de transferência de calor em um sistema termicamente isolado deve ser escrita na forma (1), e não na forma $\Delta U_1 + \Delta U_2 + \cdots + \Delta U_n = 0$, como é feito em alguns manuais e livros didáticos. O fato é que no processo de troca de calor, os corpos realizam trabalho não apenas entre si (a soma desse trabalho é zero), mas também contra a pressão externa (atmosférica). Somando as equações da primeira lei da termodinâmica para todos os corpos do sistema, obtemos

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = (\Delta U_1 + \Delta U_2 + \cdots + \Delta U_n) + (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \Delta U + A. \tag{9}$$

No lado direito da igualdade existem dois termos (a variação da energia interna do sistema e o trabalho do sistema contra a pressão externa), cuja soma é zero devido ao fato do sistema ser isolado termicamente, mas cada um dos quais pode ser diferente de zero. É por isso que nas tabelas os valores dos coeficientes nas fórmulas (2)–(5) são dados para calcular a quantidade de calor (à pressão atmosférica), e não para calcular a variação da energia interna.

Passemos agora a considerar tarefas específicas. Comecemos pelo caso mais simples, quando os corpos do sistema são aquecidos ou resfriados, mas não passam por transformações de fase.

Exemplo 1. Para preparar um banho com capacidade de $V = 200$ l, misturou-se água fria a $t_1 = 10$ °C com água quente a $t_2 = 60$ °C. Quantos litros de água fria são necessários para que a temperatura do banho chegue a $t^\star = 40$ °C?

Solução: A temperatura final de cada corpo é $t^\star$, então a equação (1) tem a forma

$$c\rho V_1(t^\star - t_1) + c\rho V_2(t^\star - t_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{t^\star - t_1}{t_2 - t^\star}. \tag{10}$$

O volume total de duas porções de água deve ser igual ao volume do banho:

$$V_1 + V_2 = V \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{V_2}{V_1} = \frac{V}{V_1}. \tag{11}$$

Utilizando as equações anteriores obtemos que

$$\frac{V}{V_1} = 1 + \frac{t^\star - t_1}{t_2 - t^\star} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t^\star} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \left(\frac{t_2 - t^\star}{t_2 - t_1}\right) V = 80 \text{ l}. \tag{12}$$

Exemplo 2. Um termômetro mostrando uma temperatura $t_1 = 22$ °C é imerso em água, após o que mostra uma temperatura $t^\star = 70$ °C. Qual era a temperatura (em °C) da água antes de o termômetro ser imerso? Massa de água $m_2 = 40$ g, capacidade calorífica do termômetro $C_1 = 7$ J/K.

Solução: O termômetro mostra sua própria temperatura, que em estado de equilíbrio térmico é igual à temperatura ambiente. O calor é trocado entre o termômetro e a água; a leitura final do termômetro nos dá a temperatura de equilíbrio térmico. A equação do balanço de calor tem a forma

$$C_1 \left(t^\star - t_1\right) + c m_2 \left(t^\star - t_2\right) = 0, \tag{13}$$

de onde obtemos que

$$t_2 = t^\star + \frac{C_1}{c m_2} \left(t^\star - t_1\right) = 72\ ^\circ\text{C}. \tag{14}$$

Aqui nos deparamos com uma situação característica de qualquer processo de medição: o uso de um dispositivo de medição pode alterar o valor medido.

Exemplo 3. Depois de baixar um corpo aquecido a $t_1 = 100\ ^\circ\text{C}$ em água com temperatura $t_a = 10\ ^\circ\text{C}$, a temperatura $t_1^\star = 40\ ^\circ\text{C}$ foi estabelecida. Qual será a temperatura (em °C) da água se, sem remover o primeiro corpo, você colocar nele outro corpo semelhante, aquecido a $t_2 = 120\ ^\circ\text{C}$?

Solução: Primeiro, vamos escrever a equação do balanço de calor para o primeiro processo de transferência de calor:

$$C \left(t_1^\star - t_1\right) + c_a m_a \left(t_1^\star - t_a\right) = 0. \tag{15}$$

No segundo processo de troca de calor já participam três corpos: o primeiro corpo, a água e o segundo corpo (com a mesma capacidade térmica do primeiro):

$$C \left(t_2^\star - t_1^\star\right) + c_a m_a \left(t_2^\star - t_1^\star\right) + C \left(t_2^\star - t_2\right) = 0. \tag{16}$$

Notemos que, utilizando estas equações

$$\frac{2t_2^\star - t_1^\star - t_2}{t_2^\star - t_1} = \frac{t_1^\star - t_1}{t_1^\star - t_a}, \tag{17}$$

ou seja que

$$2t_2^\star \left(t_1^\star - t_a\right) - \left(t_1^\star + t_2\right)\left(t_1^\star - t_a\right) = t_2^\star \left(t_1^\star - t_1\right) + t_1 \left(t_1^\star - t_1\right), \tag{18}$$

$$t_2^\star \left(t_1^\star + t_1 - 2t_a\right) = \left(t_1^\star + t_2\right)\left(t_1^\star - t_a\right) + t_1 \left(t_1^\star - t_1\right). \tag{19}$$

Finalmente obtemos que

$$t_2^\star = \frac{\left(t_1^\star + t_2\right)\left(t_1^\star - t_a\right) + t_1 \left(t_1^\star - t_1\right)}{t_1^\star + t_1 - 2t_a} = 60\ ^\circ\text{C}. \tag{20}$$

Exemplo 4. Três líquidos não congelantes quimicamente não interagentes com massas de $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 10$ kg e $m_3 = 5$ kg com capacidades térmicas específicas de $c_1 = 2$ kJ/kg·K, $c_2 = 4$ kJ/kg·K e $c_3 = 2$ kJ/kg·K são misturados no calorímetro, respectivamente. As temperaturas do primeiro e do segundo líquidos antes da mistura foram de $t_1 = 6\ ^\circ\text{C}$ e $t_2 = -40\ ^\circ\text{C}$. A temperatura da mistura passou para $t^\star = -19\ ^\circ\text{C}$. Encontre a temperatura (em °C) do terceiro líquido antes de misturar.

Solução: Este problema demonstra como é muito mais conveniente usar a equação do balanço de calor na forma (1), em vez da forma "a soma das quantidades de calor recebidas é igual à soma das quantidades distribuídas". O fato é que não sabemos de antemão se o terceiro líquido emite calor ou o recebe. É verdade que a resposta não depende de qual parte da equação esse corpo está colocado, mas não está claro se o aluno entende isso. Ao usar a equação (1), não surgem problemas; todos os sinais são ajustados automaticamente:

$$c_1 m_1 (t^\star - t_1) + c_2 m_2 (t^\star - t_2) + c_3 m_3 (t^\star - t_3) = 0. \tag{21}$$

Nós conseguimos

$$t_3 = t^\star + \frac{c_1 m_1 (t^\star - t_1) + c_2 m_2 (t^\star - t_2)}{c_3 m_3} = 60\ ^\circ\mathrm{C}. \tag{22}$$

Passemos aos problemas com transformações de fase. Se nas expressões para as quantidades de calor recebidas durante o aquecimento ou fornecidas durante o resfriamento você ainda não precisa se preocupar com os sinais (basta subtrair sempre a temperatura inicial da temperatura final), então antes das quantidades de calor de transformações de fase (fórmulas (4), (5)) é necessário colocar um sinal "com as mãos": "+" para evaporação e fusão, "–" para condensação e cristalização. Além disso, devemos lembrar que, uma vez aquecido até o ponto de fusão, o sólido absorverá calor a uma temperatura constante até derreter completamente. Somente depois disso a geração adicional de calor levará ao aquecimento do líquido. De maneira semelhante, o líquido cristaliza quando é resfriado até o ponto de fusão. Depois de aquecer o líquido até o ponto de ebulição e receber ainda mais calor, ocorre uma transformação de equilíbrio do líquido em vapor saturado a uma temperatura constante, e a quantidade de vapor é proporcional à quantidade de calor recebida (fórmula (5)). Se no estado inicial há vapor no ponto de ebulição, então assume-se que ele se condensa nessa temperatura, e só então o líquido resultante esfria (ou seja, o processo de condensação do vapor saturado ocorre em equilíbrio).

Ao começar a resolver um problema, é necessário imaginar claramente todas as etapas da transição de cada um dos corpos do estado inicial para o estado final (de equilíbrio). Para maior clareza, você pode usar um diagrama da transição dos corpos do sistema para um estado de equilíbrio com uma representação visual de todos os estágios da transição para cada um dos corpos. Mostraremos como fazer isso com exemplos específicos.

Exemplo 5. Um banho com capacidade $V = 85$ l deve ser enchido com água à temperatura de $t^\star = 30\ ^\circ\mathrm{C}$, utilizando água à temperatura de $t_1 = 80\ ^\circ\mathrm{C}$ e gelo à temperatura de $t_2 = -20\ ^\circ\mathrm{C}$. Determine a massa de gelo que deve ser colocada na banheira.

Solução: No processo de troca de calor, o primeiro corpo (água quente) é simplesmente resfriado até a temperatura de equilíbrio térmico $t^\star$, o gelo frio é primeiro aquecido até o ponto de fusão $t_f = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, então o gelo deve derreter completamente a uma temperatura constante , e só então a água resultante é aquecida até a temperatura $t^\star$.

O diagrama de processos térmicos para este caso é mostrado na Fig 1. A temperatura em tais diagramas é convencionalmente plotada no eixo vertical, de modo que os processos com aumento de temperatura são direcionados de baixo para cima, com diminuição - de cima para baixo, processos que ocorrem em uma temperatura constante - horizontalmente. Acima de cada processo está escrito o parâmetro chave incluído na fórmula da quantidade de calor, abaixo está a massa da substância participante do processo. Olhando para esse

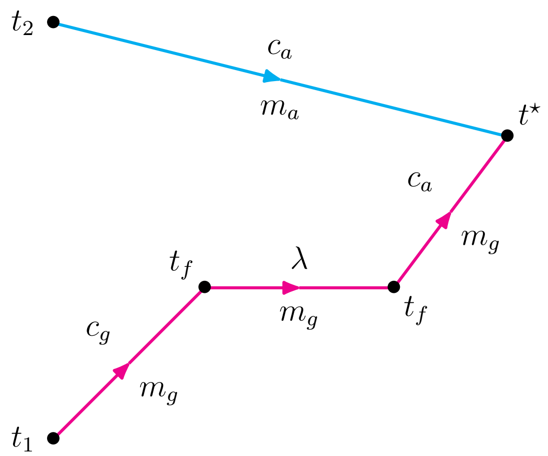

Fig 1. Esquema para solução do exemplo

diagrama, você pode escrever automaticamente a equação do equilíbrio térmico:

$$c_g m_g (t_f - t_1) + \lambda m_g + c_a m_g (t^\star - t_f) + c_a m_a (t^\star - t_2) = 0. \tag{23}$$

A segunda equação é a condição para conservação da massa:

$$m_a + m_g = \rho_a V. \tag{24}$$

Então temos que

$$c_g m_g (t_f - t_1) + \lambda m_g + c_a m_g (t^\star - t_f) + c_a (\rho_a V - m_g)(t^\star - t_2) = 0, \tag{25}$$

os termos com m_h podem ser isolados

$$m_g [c_g (t_f - t_1) + \lambda + c_a (t^\star - t_f) - c_a (t^\star - t_2)] = c_a \rho_a V \tag{26}$$

simplificando obtemos que

$$m_g = \frac{c_a \rho_a V}{c_g (t_f - t_1) + \lambda + c_a (t_2 - t_f)} = 25 \text{ kg}. \tag{27}$$

Exemplo 6. Pedaços de gelo derretido são jogados em um calorímetro com água. Em algum momento, os pedaços de gelo param de derreter. A temperatura inicial da água é $t_1 = 20$ °C. Em que porcentagem a massa de água aumentou?

Solução: A primeira coisa que você precisa prestar atenção são as informações ocultas contidas na condição. Embora a temperatura do gelo não seja declarada diretamente, as palavras "gelo derretido" significam que a temperatura do gelo é igual ao ponto de fusão, ou seja, $t_2 = t_f = 0$ °C . As palavras "os pedaços de gelo param de derreter" significam que o gelo não pode mais receber calor, ou seja, que a temperatura da água caiu para a temperatura de fusão e o sistema atingiu o equilíbrio térmico: $t^\star = t_f = 0$ °C. Finalmente, é óbvio que o aumento da massa de água é igual à massa de gelo derretido. Vamos traçar um diagrama dos processos térmicos (Fig 2) e anotar a equação de equilíbrio de calor existente:

$$c_a m_a (t_f - t_1) + \lambda m_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_g}{m_a} = \frac{c_a (t_1 - t_f)}{\lambda}. \tag{28}$$

Como conhecemos que $\Delta m_a = m_g$, então podemos escreber

$$\frac{\Delta m_a}{m_a} = \frac{c_a\left(t_1 - t_f\right)}{\lambda} = 0.25 \tag{29}$$

ou seja que a massa de água aumentou 25%.

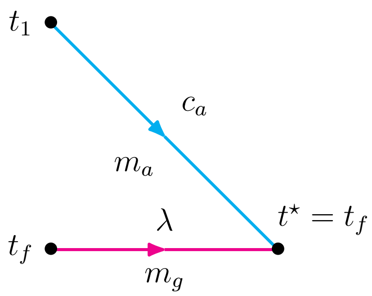

Fig 2. Esquema para solução do exemplo

Exemplo 7. O calorímetro continha gelo com massa $m_g = 1$ kg. Qual era a temperatura do gelo se, após adicionar $m_a = 15$ g de água a uma temperatura de $t_2 = 20$ °C ao calorímetro, o equilíbrio térmico fosse estabelecido no calorímetro a uma temperatura de $t^\star = -2$ °C?

Solução: Para atingir a temperatura de equilíbrio térmico, a água deve esfriar até a temperatura de fusão do gelo ($t_f = 0$ °C), depois congelar (cristalizar), e somente depois disso o gelo resultante esfriará até $t^\star$. No diagrama dos processos térmicos (Fig 3), colocamos $-\lambda$ acima da linha de cristalização, pois durante a cristalização os corpos emitem calor (recebem calor negativo). A equação do balanço de calor tem a forma

$$c_g m_g\left(t^\star - t_1\right) + c_a m_a\left(t_f - t_2\right) + (-\lambda) m_a + c_g m_a\left(t^\star - t_f\right) = 0 \tag{30}$$

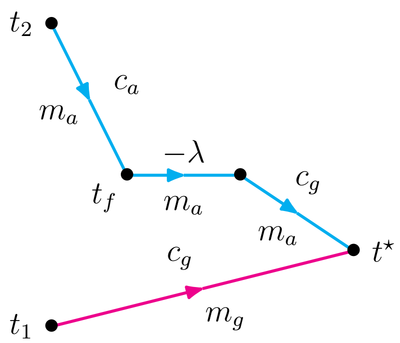

Fig 3. Esquema para solução do exemplo

de onde obtemos que

$$t_1 = t^\star + \frac{c_a m_a\left(t_f - t_2\right) - \lambda m_a + c_h m_a\left(t^\star - t_f\right)}{c_h m_h} = -5 \text{ °C} \tag{31}$$

Até agora, os processos térmicos que ocorriam com corpos em processos de troca de calor e atingindo o equilíbrio térmico eram descritos por um cenário, sem opções. O próximo problema é o primeiro em que existem dois cenários possíveis e é preciso pesquisar um pouco para escolher um deles.

Exemplo 8. O calorímetro contém água, cuja massa é $m_a = 100$ g e a temperatura é $t_1 = 0$ °C. A ele é adicionado um pedaço de gelo cuja massa é $m_g = 20$ g e $t_2 = -5$ °C. Qual será a temperatura do conteúdo do calorímetro após o equilíbrio térmico ser estabelecido nele?

Solução: Embora o problema seja semelhante ao anterior, mas agora, na nova formulação, surge a ambiguidade: ou toda a água congela e no final só resta gelo frio (com temperatura inferior a 0 °C), ou apenas parte da água vai congelar, e o gelo já vai esquentar até 0 °C e é exatamente essa temperatura que vai ser estabelecida no calorímetro. Neste caso, fica imediatamente claro que a quantidade de calor $Q_1 = \lambda m_a$ que deve ser retirada da água para congelá-la é muitas vezes maior que a quantidade de calor $Q_2 = c_g m_g (t_f - t_2)$ que deve ser transmitido ao gelo para aquecê-lo a 0 °C. Isso significa que a segunda opção está sendo implementada. Porém, se a resposta não for óbvia, não há necessidade de realizar pesquisas especiais ou resolver o problema para cada uma das opções. Basta escrever a equação do balanço de calor apenas para a primeira opção, e se obtiver uma temperatura negativa $t^\star$, então esta será a resposta correta. Mas se a resposta for sim, então, como isso é impossível, a segunda opção é implementada, ou seja, $t^\star = 0$ °C. A equação do balanço térmico para a primeira opção tem a forma (Fig 4-esquerda)

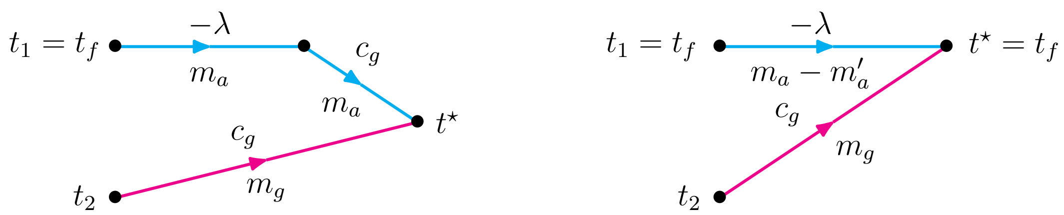

Fig 4. Esquema para solução do exemplo

$$(-\lambda)m_a + c_g m_a (t^\star - t_f) + c_g m_g (t^\star - t_2) = 0, \tag{32}$$

onde obtemos a seguinte expressão

$$t^\star = \frac{\lambda_a - c_g (m_a t_f + m_g t_2)}{c_g (m_a + m_g)} \tag{33}$$

e a resposta é muito positiva (mais de 100 °C). Portanto, a resposta correta é $t^\star = 0$ °C.

Observe que a escolha do cenário que mais rapidamente nos levará ao objetivo depende da questão do problema. Se o problema perguntasse quanta água permaneceria no sistema, seria necessário escrever a equação do balanço de calor para a segunda opção (Fig 4-direita):

$$(-\lambda)(m_a - m'_a) + c_h m_h (t_f - t_2) = 0, \tag{34}$$

Se m'_a for negativo, concluímos que não sobrará água, ou seja, ela vai congelar. Neste caso teremos que

$$m'_a = m_a - \frac{c_h m_h}{\lambda} (t_f - t_2) \,. \tag{35}$$

Exemplo 9. O calorímetro continha gelo com massa $m_1 = 1$ kg a uma temperatura de $t_1 = -5$ °C A ele é adicionada água com massa de $m_2 = 200$ g, com temperatura de $t_2 = 20$ °C. Qual será a temperatura do conteúdo do calorímetro depois que nele for estabelecido o equilíbrio térmico?

Solução: Existem três cenários possíveis neste problema: a temperatura de equilíbrio será negativa (toda a água congelará), positiva (todo o gelo derreterá) ou zero. Podemos começar com uma pequena pesquisa que nos permitirá descartar uma das opções. Vamos comparar as quantidades de calor $Q_1 = c_a m_2 (t_f - t_2)$ e $Q_2 = c_g m_1 (t_f - t_1)$ que os corpos devem receber para atingir um ponto de fusão de 0 °C. fácil verificar que $|Q_1| > |Q_2|$. Isso significa que o gelo começará a derreter antes que a água congele. Portanto, excluo o primeiro cenário. A equação do balanço de calor para o segundo cenário diz (Fig 5):

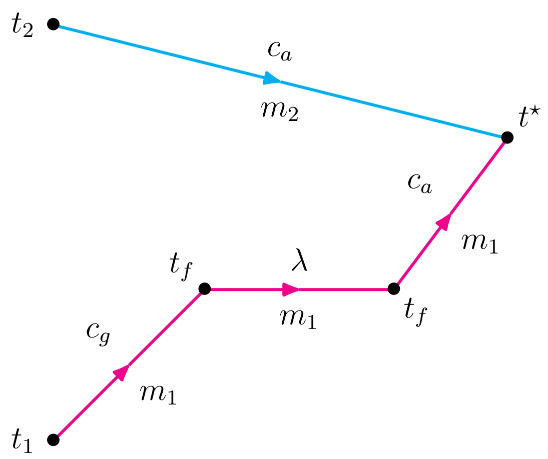

Fig 5. Esquema para solução do exemplo

$$c_h m_1 (t_f - t_1) + \lambda m_1 + c_a m_1 (t^\star - t_f) + c_a m_2 (t^\star - t_2) = 0, \tag{36}$$

obteremos uma resposta negativa para $t^\star$, o que é impossível neste cenário. Isso significa que a resposta correta é novamente 0 °C.

É possível aqui, como no problema anterior, explorar apenas um dos cenários e obter a resposta correta? Nesse caso, só podemos fazer um cálculo se adivinharmos imediatamente a opção correta. Se estiver incorreto, para obter a resposta correta você terá que escrever a equação do equilíbrio térmico novamente. Portanto, o caminho que escolhemos (com um pouco de pesquisa preliminar) parece mais atraente.

Agora vários problemas com evaporação e condensação.

Exemplo 10. Um tubo é colocado em um recipiente com água. O vapor passa pelo tubo através da água a uma temperatura $t_e = 100$ °C. Inicialmente, a massa de água aumenta, mas em algum momento a massa de água para de aumentar, embora o vapor ainda esteja passando. A massa inicial da água é $m_{a,1} = 230$ g e a massa final é $m_{a,2} = 260$ g. Qual é a temperatura inicial da água na escala Celsius? Despreze as perdas de calor.

Solução: A massa de água deixa de aumentar quando sua temperatura se iguala à temperatura do vapor (ponto de ebulição), e o aumento da massa de água será igual à massa do vapor condensado. A equação do balanço de calor para este caso tem a forma (Fig 6)

$$-r\left(m_{a,2}-m_{a,1}\right)+c_a m_{a,1}\left(t_e-t_a\right)=0 \tag{37}$$

Resolvendo esta equação, encontramos

$$t_a=t_e-\frac{r}{c_a}\left(\frac{m_{a,2}}{m_{a,1}}-1\right)=38.6\ ^\circ\text{C}. \tag{38}$$

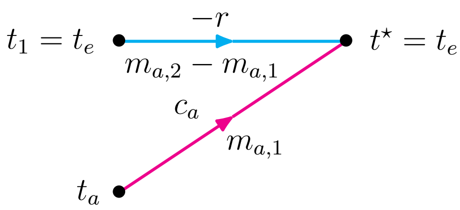

Fig 6. Esquema para solução do exemplo

Exemplo 11. Um pedaço de aço pesando $m_{st}=10$ kg, aquecido a $t_2=500$ °C, é colocado em um recipiente contendo $m_a=4.6$ kg de água a $t_1=20$ °C. A água é aquecida a $t_v=100$ °C, e parte dela se transforma em vapor. Encontre a massa de vapor produzida. Capacidade térmica específica do aço $c_{st}=460$ J/kg·K.

Solução: A temperatura final do sistema (temperatura de equilíbrio térmico) é igual ao ponto de ebulição da água. Vamos desenhar um diagrama de processos térmicos (Fig 7) e escrever a equação do balanço de calor

$$c_a m_a\left(t_v-t_1\right)+r m_v+c_{st} m_{st}\left(t^\star-t_2\right)=0, \tag{39}$$

de onde obtemos que

$$m_v=\frac{c_a m_a\left(t_1-t_v\right)+c_{st} m_{st}\left(t_2-t^\star\right)}{r}=128\text{ g}. \tag{40}$$

No próximo problema, duas transformações de fase ocorrem simultaneamente – fusão e condensação.

Exemplo 12. Uma mistura composta por $m_h=2.5$ kg de gelo e $m_a=7.5$ kg de água deve ser aquecida a uma temperatura de $t^\star=50$ °C, passando vapor a uma temperatura de $t_v=100$ °C. Determine a quantidade de vapor necessária para isso.

Solução: A temperatura inicial da mistura de água e gelo é igual à temperatura de fusão do gelo $t_f=0$ °C. Primeiro, o gelo derrete, depois toda a água resultante é aquecida até $t^\star$ devido à quantidade de calor obtida durante a condensação e resfriamento do vapor. A equação do equilíbrio de calor se parece com (Fig 8)

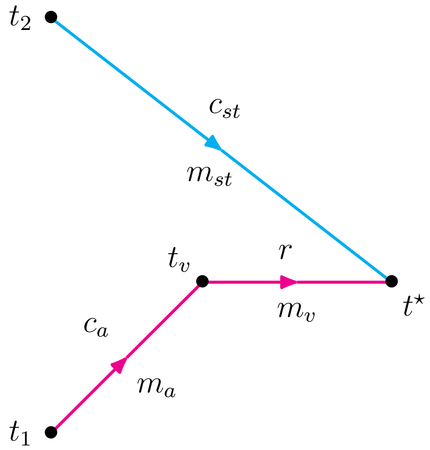

Fig 7. Esquema para solução do exemplo

$$\lambda m_g + c_a \left(m_a + m_g\right)\left(t^\star - t_f\right) + (-r)m_v + c_a m_v \left(t^\star - t_v\right) = 0, \tag{41}$$

de onde obtemos que

$$m_v = \frac{\lambda m_g + c_a \left(m_a + m_g\right)\left(t^\star - t_f\right)}{r - c_a \left(t^\star - t_v\right)} = 1.17 \text{ kg}. \tag{42}$$

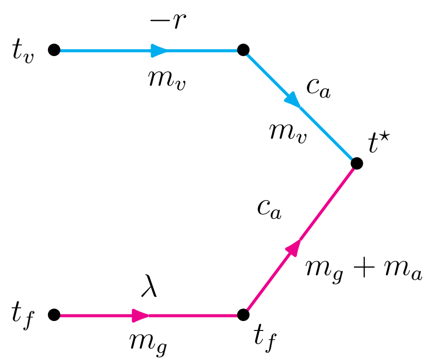

Fig 8. Esquema para solução do exemplo

Exemplo 13. Em um recipiente contendo $m_1 = 9$ kg de água a $t_1 = 20$ °C, $m_2 = 1$ kg de vapor é introduzido a $t_v = 100$ °C. Determine a temperatura final no recipiente. A capacidade térmica do recipiente e a perda de calor não são levadas em consideração.

Solução: O primeiro cenário é que o vapor condense completamente a uma temperatura de 100 °C e a água resultante seja resfriada até a temperatura de equilíbrio térmico. O segundo cenário é que a água aquece até o ponto de ebulição antes que todo o vapor se condense, então $t^\star = 100$ °C. Vamos escrever a equação do balanço de calor para o primeiro cenário (Fig 9), e se a resposta for superior a 100 °C, então o segundo cenário será realizado.

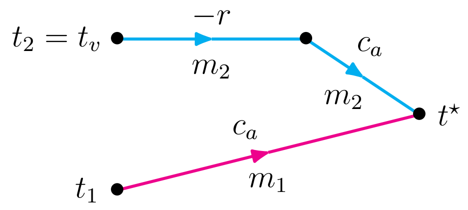

Fig 9. Esquema para solução do exemplo

Neste caso teremos que

$$c_a m_1 \left(t^\star - t_1\right) + (-r)m_2 + c_a m_2 \left(t^\star - t_v\right) = 0, \tag{43}$$

do qual obtemos $t^\star = 78$ °C. Esta é a resposta para o problema.

No último problema o número de opções aumenta.

Exemplo 14. Há uma certa quantidade de gelo no recipiente a uma temperatura $t_g = -50$ °C. O vapor de água é liberado no recipiente a uma temperatura $t_v = 100$ °C. Encontre a temperatura estacionária da água no recipiente se a massa de vapor for igual à metade da massa de gelo.

Solução: Neste caso, existem quatro cenários possíveis, levando a quatro tipos de resposta. Se houver muito gelo, você poderá obter uma temperatura negativa (no final - apenas gelo frio). Se houver menos gelo, a resposta pode ser 0 °C (no final - uma mistura de gelo e água). Se houver ainda menos gelo, a resposta pode estar entre 0 °C e 100 °C (no final - apenas água). Finalmente, a resposta pode ser 100 °C (vapor e água no final). Plano de solução: escreva a equação para o terceiro cenário, e se a resposta estiver entre 0 °C e 100 °C, você adivinhou! Se o resultado for superior a 100 °C, então o quarto cenário é realizado (resposta 100 °C). Mas se for inferior a 0 °C, você ainda terá que fazer uma escolha entre o primeiro e o segundo cenários. Em seguida, escrevemos a equação do balanço térmico para o primeiro cenário e, se a resposta for positiva, então o segundo cenário é realizado (resposta 0 °C). Então, o terceiro cenário (Fig 10):

Então temos pela equação de balanço que

$$c_g m \left(t_f - t_g\right) + \lambda m + c_a m \left(t^\star - t_f\right) + (-r)\frac{m}{2} + c_a \frac{m}{2} \left(t^\star - t_v\right) = 0, \tag{44}$$

que pode ser reescrita como

$$2c_g \left(t_f - t_g\right) + 2\lambda + 2c_a \left(t^\star - t_f\right) + (-r) + c_a \left(t^\star - t_v\right) = 0, \tag{45}$$

logo isolando $t^\star$ obtemos que

$$t^\star = \frac{2c_g \left(t_f - t_g\right) + 2\lambda - r + c_a \left(t_v - 2t_f\right)}{3c_a} = 180 \text{ °C}. \tag{46}$$

Achamos que $t^\star > 100$ °C, o que significa a implementação do quarto cenário e a resposta é 100 °C (sorte!).

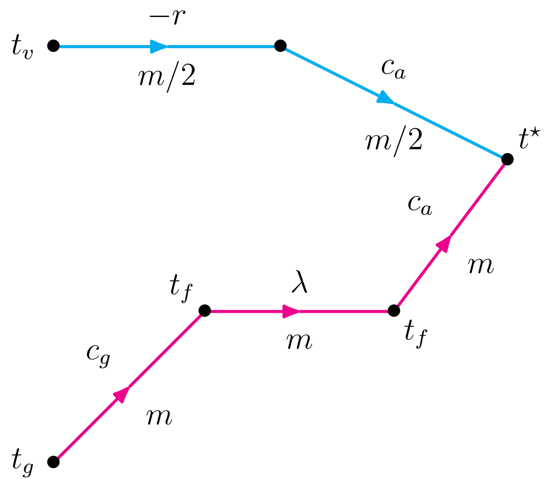

Fig 10. Esquema para solução do exemplo

Problemas:

1. É necessário misturar água a uma temperatura de 50 °C e água a uma temperatura de 10 °C para que a temperatura da mistura seja igual a 20 °C. Quantas vezes mais água fria você deve tomar do que quente?

2. Um corpo de cobre, aquecido a 100 °C, é mergulhado em água, cuja massa é igual à massa do corpo de cobre. O equilíbrio térmico ocorreu a uma temperatura de 30 °C. Determine a temperatura inicial (em °C) da água. A capacidade térmica específica do cobre é 360 J/kg·K.

3. 0.1 kg de água foi despejado no recipiente a uma temperatura de 60 °C, após o que a temperatura da água caiu para 55 °C. Supondo que a capacidade calorífica do recipiente seja 70 J/K, encontre a temperatura inicial (em °C) do recipiente.

4. Para medir a temperatura da água pesando 20 g, foi imerso nela um termômetro que marcava 32.4 °C. Qual é a temperatura real (em °C) da água se a capacidade calorífica do termômetro é 2.1 J/K e antes da imersão na água ele apresentava uma temperatura ambiente de 8.4 °C?

5. Um corpo aquecido a 110 °C foi baixado em um recipiente com água, e como resultado a temperatura da água aumentou de 20 °C para 30 °C. Qual seria a temperatura (em °C) da água se outro corpo semelhante, mas aquecido a 120 °C, fosse mergulhado nela ao mesmo tempo que o primeiro?

6. Um recipiente contém uma certa quantidade de água e a mesma quantidade de gelo em estado de equilíbrio térmico. Vapor de água passa através do recipiente a uma temperatura de 100 °C. Encontre a temperatura de estado estacionário da água no recipiente se a massa de vapor que passa por ele for igual à temperatura inicial e a temperatura não for superior a 16 °C? Despreze as perdas de calor. O calor específico do vapor de água é igual ao da água.

7. Um pedaço de neve pesando 250 g é jogado em um litro de água a uma temperatura de 20 °C, parcialmente já derretido, ou seja, contendo um pouco de água a 0 °C. A temperatura da água no recipiente ao atingir o equilíbrio térmico acabou sendo de 5 °C. Determine a quantidade de água no pedaço de neve.

8. 1 kg de água com temperatura de 44 °C é despejado em um recipiente isolado termicamente com uma grande quantidade de gelo a uma temperatura de 0 °C. Que massa de gelo derreterá quando o equilíbrio térmico for estabelecido no recipiente.

9. A quantidade de calor liberada quando 1 kg de vapor condensa a uma temperatura de 100 °C e resfria a água resultante a 0 °C é gasta no derretimento de uma certa quantidade de gelo, cuja temperatura é de 0 °C. Determine a massa de gelo derretido.

10. Um recipiente contém uma certa quantidade de água e a mesma quantidade de gelo em estado de equilíbrio térmico. Vapor de água passa através do recipiente a uma temperatura de 100 °C. Encontre a temperatura estacionária da água no recipiente se a massa do vapor passado for igual à massa inicial.