ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Física Além da Sala de Aula (FASA - 2025)

Exame de Admissão: Álgebra e Geometria

São Paulo | 23 de fevereiro de 2025.

DADOS PESSOAIS:

Nome: ______________________________

Escola: ______________________________

Ano/Série: ____________ **E-mail:** ______________________________

ORIENTAÇÕES:

- As resoluções de problemas diferentes devem ser escritas em folhas separadas.
- Se n é o número total de folhas entregues, então você pode identificar as páginas com os elementos da sequência $1/2n, 2/2n, 3/2n, \ldots, 2n/2n$.
- Cada folha deve conter o nome completo do estudante.
- O valor de cada problema está indicado no respectivo enunciado.
- A duração do exame é de 2 HORAS E MEIA.

Problema 1 (0.5pts)
Mostre a seguinte identidade:

$$\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48}=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Solução: Vamos considerar a variável $z=a^2+4/a^2>0$. Considerando que $(a+2/a)^2=a^2+4+4/a^2=z+4$, obtemos que

$$\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48}=\sqrt{z^2-8z+16}=\sqrt{(z-4)^2}=$$
$$=z-4=\left(a^2+\frac{4}{a^2}-4\right)=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Problema 2 (1.0pt)
Encontre a soma

$$1+11+111+\cdots+\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ dígitos}}.$$

Solução: Vamos supor que a soma buscada é S_n. Então, vamos tratar os diferentes termos da soma como progressões geométricas (que de fato são), ou seja

$$11=1+10=\frac{10^2-1}{9},$$

$$111=1+10+100=\frac{10^3-1}{9},$$

$$1111=1+10+100+1000=\frac{10^4-1}{9},$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-vezes}}=1+10+100+\cdots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}.$$

Além de que $1=(10-1)/9$, então somando obtemos

$$S_n=\frac{1}{9}\left(10+10^2+\cdots+10^n-n\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right).$$

Problema 3 (0.5pt)
Resolva o seguinte sistema de equações no conjunto dos números reais:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Solução: Neste caso temos que $2^x + 2^{5-x} = 12$ então utilizando a nova variável $z = 2^x > 0$ obtemos que $z^2 - 12z + 32 = 0$. As soluções da equação anterior são $z_1 = 8$ e $z_2 = 4$, ou seja, $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$. Então, as soluções do sistema são $x_1 = 3$, $y_1 = 2$ e $x_2 = 2$, $y_2 = 3$.

Problema 4 (1.0pt)
Encontre todos os valores reais de x e y que satisfazem a equação:

$$x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0.$$

Solução: Primeiro vamos somar e restar a quantidade $4\cos^2(xy)$, ou seja que obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + 4x\cos(xy) + 4\cos^2(xy) + 4 - 4\cos^2(xy) &= 0, \\ [x + 2\cos(xy)]^2 + 4\left[1 - \cos^2(xy)\right] &= 0. \end{aligned}$$

Note que ambas as parcelas são não negativos, então necessariamente $x + 2\cos(xy) = 0$ e $\cos^2(xy) = 1 \;\Rightarrow\; \cos(xy) = \pm 1$.

No primeiro caso temos o sistema

$$\cos(xy) = 1, \quad x + 2\cos(xy) = 0.$$

As soluções são $x = -2$ e $y = k\pi$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

No segundo caso temos o sistema

$$\cos(xy) = -1, \quad x + 2\cos(xy) = 0.$$

As soluções são $x = 2$ e $y = (2m+1)\pi/2$, onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Problema 5 (1.5pt)
Mostre que, se

$$\begin{cases} a\cos^3(\alpha) + 3a\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) = m \\ a\sin^3(\alpha) + 3a\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) = n \end{cases}$$

então

$$\sqrt[3]{(m+n)^2} + \sqrt[3]{(m-n)^2} = 2\sqrt[3]{a^2}.$$

Solução: Primeiramente vamos somar as duas equações, então

$$\cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) + 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + \sin^3(\alpha) = \frac{m+n}{a},$$

$$[\cos(\alpha) + \sin(\alpha)]^3 = \frac{m+n}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{m+n}{a}},$$

elevando ao quadrado, obtemos

$$1 + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \sqrt[3]{\left(\frac{m+n}{a}\right)^2}.$$

Agora vamos escrever a diferença das equações, então

$$\cos^3(\alpha) - 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) + 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) = \frac{m-n}{a},$$

$$[\cos(\alpha) - \sin(\alpha)]^3 = \frac{m-n}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{m-n}{a}},$$

elevando ao quadrado, obtemos

$$1 - 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \sqrt[3]{\left(\frac{m-n}{a}\right)^2}.$$

Então somando os dois resultados,

$$2 = \sqrt[3]{\left(\frac{m+n}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{m-n}{a}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{(m+n)^2} + \sqrt[3]{(m-n)^2} = 2\sqrt[3]{a^2}.$$

Problema 6 (0.5pt)
Duas linhas mutuamente perpendiculares interceptam os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ do quadrado $ABCD$ nos pontos E, F, K e L, respectivamente (Fig. 1). Prove que $\overline{EK} = \overline{FL}$.

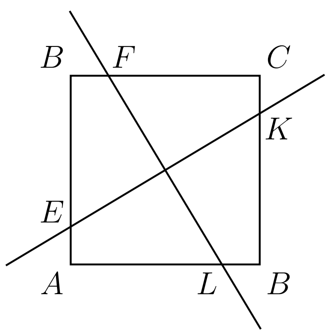

Fig. 1

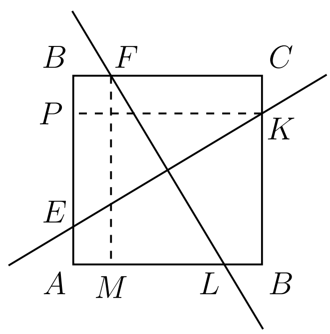

Fig. 2

Solução: Para demostrar a igualdade dos segmentos, tracemos $\overline{FM} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{KP} \parallel \overline{AD}$, então, os segmentos $\overline{EK}$ e $\overline{FL}$ são lados dos triângulos retângulos EKP e FLM (ver Fig. 2) e, pelo tanto, é suficiente demostrar a igualdade dos triângulos. Temos: $\overline{PK} = \overline{FM}$ (alturas do quadrado), $\angle LFM = \angle EKP$ (ângulos com lados entre perpendiculares). Esto significa que $\triangle EKP = \triangle FLM$. Pela igualdade dos triângulos, podemos deduzir a igualdade das hipotenusas, ou seja, $\overline{EK} = \overline{FL}$.

Problema 7 (1.0pt)
Prove que se $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os catetos, $\overline{AB}$ a hipotenusa de um triângulo retângulo e r é o raio do círculo inscrito (Fig. 3), então $2r = \overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}$.

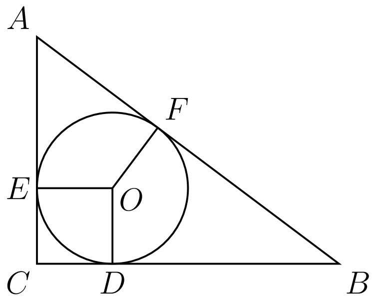

Fig. 3

Solução: Temos que $\overline{OD} \perp \overline{BC}$, $\overline{OE} \perp \overline{AC}$, $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ (ver Fig. 3). $ODCE$ é um quadrado (todos os ângulos são retos y $\overline{OE} = \overline{OD}$), ou seja, $\overline{CE} = \overline{CD} = r$, $\overline{BD} = \overline{BF}$ y $\overline{AE} = \overline{AF}$, pelo tanto, $\overline{BF} = \overline{BC} - r$, $\overline{AF} = \overline{AC} - r$. Temos que $\overline{AB} = \overline{BF} + \overline{AF}$, ou seja, $\overline{AB} = (\overline{BC} - r) + (\overline{AC} - r)$, de onde $2r = \overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}$.

Problema 8 (1.5pt)
Um ponto M é tomado dentro do triângulo ABC com lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ de modo que os lados do triângulo sejam vistos em ângulos iguais a partir deste ponto. Encontre $\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM}$.

Solução: Vamos supor que $\overline{AM} = x$, $\overline{BM} = y$ y $\overline{CM} = z$ (ver Fig. 4). Pelo enunciado do problema $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC = 120°$. Agora vamos utilizar a lei de cossenos com relação a cada um triângulos AMB, BMC y AMC nos permite obter o sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 = z^2 + y^2 + yz, \\ b^2 = x^2 + z^2 + xz, \\ c^2 = x^2 + y^2 + xy. \end{cases}$$

Seguidamente, temos que $S = S_{ABC} = S_{AMC} + S_{BMC} + S_{AMB}$, onde

$$S_{AMC} = \frac{xz}{2}\sin(120°), \quad S_{BMC} = \frac{yz}{2}\sin(120°), \quad \text{e} \quad S_{AMB} = \frac{xy}{2}\sin(120°),$$

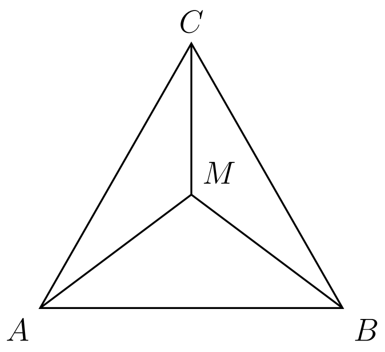

Fig. 4

ou seja $S = \sqrt{3}\,(xz + xz + xy)\,/4$. Assim que

$$xy + xz + yz = \frac{4S}{\sqrt{3}} \quad \text{onde} \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

na ultima equação utilizamos a fórmula de Herón para a área do triângulo, $p = (a+b+c)/2$.

Temos que achar o valor da soma $x + y + z$. Conhecemos que $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$. Somando as três equações do sistema obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{1}{2}\,(xy + xz + yz)\,.$$

Finalmente, obtemos

$$(x+y+z)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{3}{2}\,(xy + xz + yz) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3},$$

de onde

$$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}}.$$

Problema 9 (1.0pts)
Temos que, um conjunto de n retas paralelas em um plano são cruzadas por um outro conjunto de m retas paralelas. Quantos paralelogramos podem ser separados na rede resultante?

Solução: Qualquer paralelogramo é determinado por duas retas da primeira série, o que pode ser feito de $n(n-1)/2$ formas diferentes, e por duas retas da segunda série, o que pode ser feito de $m(m-1)/2$ formas diferentes. Desse modo, teremos que o numero total de paralelogramos é dado por $nm(n-1)(m-1)/4$.

Problema 10 (0.5pt)
Construídos nos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo ABC estão os quadrados $ABDE$ e $BCKM$.

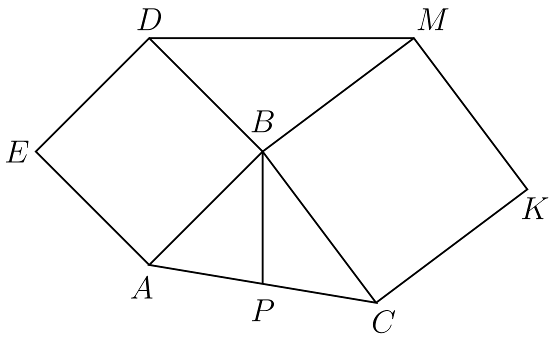

Fig. 5

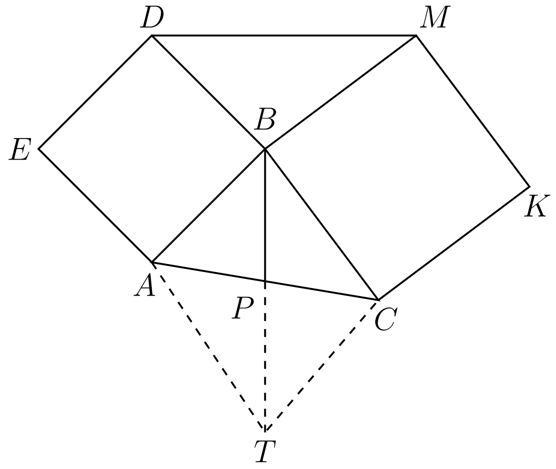

Fig. 6

Prove que o segmento de reta $\overline{DM}$ é duas vezes o comprimento da mediana $\overline{BP}$ do triângulo ABC (ver Fig. 5).

Solução: Como temos que mostrar que $\overline{DM} = 2\overline{BP}$, é útil duplicar a mediana $\overline{BP}$ e transformar o triangulo ABC em um paralelogramo $ABCT$ e, então, mostrar que $\overline{DM} = \overline{BT}$ (ver Fig. 6). Para mostrar que os segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{BT}$ são iguais, podemos olhar para eles como os lados equivalentes de dois triângulos, e mostrar que tais triângulos são iguais.

Vamos olhar os triângulos DMB e BCT. Temos: $\overline{BM} = \overline{BC}$ por ser lados do quadrado $BMKC$; $\overline{DB} = \overline{CT}$ (é claro que $\overline{DB} = \overline{AB}$ por ser lados de um quadrado e $\overline{AB} = \overline{CT}$ por ser lados opostos de um paralelogramo); $\angle DBM = \angle BCT$ (são ângulos com lados respectivamente perpendiculares). Então podemos concluir que $\triangle DBM = \triangle BCT$ (por ter dois lados e o ângulo entre os lados respeitativamente iguais) e, então, $\overline{DM} = \overline{BT}$. Como $\overline{BT} = 2\overline{BP}$, de $\overline{DM} = \overline{BT}$ temos que $\overline{DM} = 2\overline{BP}$.

ALGUMAS IDENTIDADES E FÓRMULAS:

Álgebra:

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^3$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Trigonometria:

- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
- $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

Geometria:

- A área S de um triângulo qualquer, cujos lados são a, b e c, pode ser determinada usando a **fórmula de Herón**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{onde} \quad p = (a+b+c)/2.$$

- Dados dois lados de um triângulo, a e b, e o ângulo θ entre eles, a área S do triângulo pode ser calculada pela fórmula:

$$S = \frac{ab}{2}\sin(\theta).$$