ICTP | International Centre for Theoretical Physics
SAIFR | South American Institute for Fundamental Research

Física Além da Sala de Aula (FASA - 2025)

Aula 1: Elementos da Teoria dos Conjuntos

São Paulo | 23 de fevereiro de 2025.

1 Símbolos lógicos

1.1 Proposições e operadores lógicos

Uma *proposição* é toda afirmação sobre a qual faz sentido dizer que é verdadeira ou falsa. A partir das proposições e com a ajuda dos *operadores lógicos*, podem-se formar novas proposições.

Há diversos operadores lógicos; vamos analisar aqueles que usaremos em nosso curso.

1) A operação de negação corresponde, na linguagem cotidiana, à partícula "não". Para cada proposição p, podemos formar uma nova proposição $\overline{p}$ (lida como "p com barra" ou "não p"), que é verdadeira quando p é falsa e falsa quando p é verdadeira. A proposição $\overline{p}$ é chamada de *negação* de p.

   Exemplo 1.1. Para a proposição "a matéria escura existe", a negação seria "a matéria escura não existe".

2) A proposição composta por duas proposições p e q, unidas pela conjunção "e", é chamada de *conjunção* e é representada por $p \wedge q$ (lê-se: "p e q").

   A conjunção $p \wedge q$ é considerada uma proposição verdadeira somente quando ambas as proposições p e q são verdadeiras.

3) Se a proposição é formada pelas proposições p e q com a conjunção "ou", ela é chamada de *disjunção* das proposições p e q e é representada por $p \vee q$ (lê-se: "p ou q").

   A disjunção $p \vee q$ é considerada uma proposição verdadeira somente quando pelo menos uma das proposições p ou q for verdadeira.

4) A proposição formada pelas proposições p e q com a expressão "se ..., então ..." é chamada de *implicação* e é representada por $p \to q$ (lê-se: "se p, então q"). Nessa proposição, p é chamada de *condição*, enquanto q é chamada de *conclusão*.

   A implicação $p \to q$ é considerada uma proposição falsa somente quando a condição (p) é verdadeira e a conclusão (q) é falsa.

5) A proposição formada pelas proposições p e q com a expressão "quando e somente quando ..." é chamada de *equivalência* (ou *implicação dupla*) e é representada por $p \leftrightarrow q$.

   A equivalência $p \leftrightarrow q$ é verdadeira somente quando ambas as proposições p e q são verdadeiras ou ambas são falsas.

Se atribuímos a número 1 às proposições verdadeiras e 0 às falsas, as operações lógicas $\overline{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$ e $p \leftrightarrow q$ podem ser definidas formalmente por meio das seguintes tabelas-verdade:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Fig. 1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Fig. 2

Novas proposições podem ser formadas por meio de diversas operações lógicas, com a particularidade de que cada operação pode ser utilizada várias vezes. A ordem em que as operações devem ser realizadas é indicada pelo uso de parênteses.

Nas tabelas de verdade da implicação, observamos que, se a condição p e a implicação $p \to q$ são verdadeiras, então a conclusão q também será verdadeira. Nesse caso, escreve-se $p \Rightarrow q$ e diz-se que q se deduz de p. Essa regra clássica de dedução é amplamente utilizada em matemática.

Se de p se deduz q e de q se deduz p, então as proposições p e q são chamadas de equivalentes. As proposições equivalentes podem ser expressas usando o símbolo $\Leftrightarrow$ ou o símbolo de igualdade, ou seja, escreve-se $p \Leftrightarrow q$ ou simplesmente $p = q$.

Durante a investigação das proposições em relação à equivalência, nos casos mais simples, é possível utilizar tabelas de verdade. Isso ocorre porque, para proposições equivalentes escritas de formas diferentes, as tabelas de verdade coincidem.

Exemplo 1.2. Utilizando as tabelas de verdade para a negação e a implicação, é fácil construir a tabela de verdade para proposições da forma $\overline{q} \to \overline{p}$:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Fig. 3

Essa tabela coincide com a tabela de verdade para a implicação $p \to q$. Portanto, as proposições $p \to q$ e $\overline{q} \to \overline{p}$ são equivalentes, ou seja, $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$ ou, de forma equivalente, $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$.

A tabela de verdade correspondente à proposição formada por n proposições simples contém 2^n linhas. Por essa razão, a equivalência das proposições é estabelecida por outro procedimento: uma certa quantidade de equivalências básicas (leis da álgebra proposicional) é verificada a partir das tabelas de verdade. As igualdades são estabelecidas da mesma forma que na álgebra elementar, onde, nas transformações idênticas, são utilizadas as leis algébricas: comutativa, associativa, distributiva e outras.

Leis fundamentais da álgebra proposicional:

1) lei da comutatividade da disjunção:

$$p \vee q = q \vee p. \tag{1}$$

2) lei da comutatividade da conjunção:

$$p \wedge q = q \wedge p. \tag{2}$$

3) lei da associatividade da disjunção:

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r. \tag{3}$$

4) lei da associatividade da conjunção:

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r. \tag{4}$$

5) Primeira lei distributiva:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \tag{5}$$

6) Segunda lei distributiva:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r). \tag{6}$$

7) Lei de Morgan:

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}, \quad \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \tag{7}$$

8) Lei da negação da negação:

$$\overline{\overline{p}} = p. \tag{8}$$

9) Leis de idempotência

$$p \vee p = p, \quad p \wedge p = p. \tag{9}$$

Em lógica, as proposições *identicamente verdadeiras* ou *identicamente falsas* desempenham um papel importante. As proposições identicamente verdadeiras são sempre verdadeiras, independentemente de se as proposições que as formam são verdadeiras ou falsas.

Exemplo 1.3. A proposição $p \vee \overline{p}$ é identicamente verdadeira.

Designaremos as proposições identicamente verdadeiras com a letra i.

As proposições identicamente falsas sempre o são, ou seja, independentemente da veracidade ou falsidade das proposições que as formam. Tais proposições são designadas com a letra l.

Exemplo 1.4. $p \wedge \overline{p} = l$, já que $p \wedge \overline{p}$ é sempre falsa, independentemente se p é verdadeiro ou falso.

Para as proposições identicamente verdadeiras e identicamente falsa, com todo p são certas as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} p \vee \overline{p} = i, &\quad p \wedge \overline{p} = l, \\ p \vee i = i, &\quad p \wedge i = p, \\ p \vee l = p, &\quad p \wedge l = l, \quad \overline{i} = l. \end{aligned} \tag{10}$$

As leis (1) - (10) da álgebra proposicional descrevem as propriedades de três operações: disjunção, conjunção e negação. A implicação e a equivalência podem ser expressas através da disjunção, conjunção e negação pelas seguintes fórmulas:

$$p \to q = \overline{p} \vee q, \tag{11}$$

$$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}). \tag{12}$$

Exemplo 1.5. Demonstrar a equivalência

$$\overline{p \to q} = p \wedge \overline{q}.$$

Solução: Utilizando a igualdade (11), a lei de Morgan e a negação da negação obtemos

$$\overline{p \to q} = \overline{\overline{p} \vee q} = \overline{\overline{p}} \wedge \overline{q} = p \wedge \overline{q}$$

□

Exemplo 1.6. Brown, Jones e Smith se acusam de serem cúmplices em um assalto a um banco. Os ladrões fugiram em um carro que os esperava. Durante a investigação, Brown afirmou que os criminosos fugiram em um Buick azul, Jones disse que o carro era um Chrysler preto, e Smith afirmou que era um Ford Mustang, mas de maneira alguma azul. Ficou evidente que, querendo dificultar a investigação, cada um deles indicou corretamente apenas a marca do carro ou a cor, mas não ambos. Qual era a marca e a cor do carro?
Solução: Vamos examinar as proposições

- p – carro de cor azul,
- q – carro de marca Buick,
- r – carro de cor preto,
- s – carro de marca Crysler,
- l – carro de marca Ford Mustang.

Pelas declarações de Brown, Jones e Smith se deduz, correspondentemente, que as proposições $p \vee q$, $r \vee s$, $\overline{p} \vee l$ são verdadeiras. Então

$$(p \vee q)(r \vee s)(\overline{p} \vee l), \tag{13}$$

é verdadeiro. Abrindo os parênteses, obtemos a disjunção de oito conjunções:

$$(p \wedge r \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge r \wedge l) \vee (p \wedge s \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge s \wedge l) \vee (q \wedge \overline{r} \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge l) \vee (q \wedge \overline{s} \wedge p) \vee (q \wedge s \wedge l). \tag{14}$$

Da formulação, conclui-se que todas as conjunções, exceto a quinta, são falsas. Portanto, a disjunção só pode ser verdadeira sob a condição de que a proposição $p \wedge q \wedge \overline{p}$ seja verdadeira, o que significa que os criminosos fugiram em um Buick preto. □

Em matemática, algumas expressões verbais são frequentemente substituídas por símbolos. Assim, por exemplo, o símbolo $\forall$ substitui a expressão "para tudo" ou "qualquer que seja", e o símbolo $\exists$ substitui a expressão "existe". Os símbolos $\forall$ e $\exists$ são chamados de *quantificadores lógicos*.

2 Operações com conjuntos

O conceito matemático de um conjunto de elementos é considerado intuitivo. Um conjunto é definido por uma regra ou critério segundo o qual é determinado se um dado elemento pertence ou não ao conjunto.

Os conjuntos são designados pelo símbolo $A = \{x\}$, onde x é a notação geral para todos os elementos do conjunto A. Os conjuntos são frequentemente escritos na forma $A = \{a, b, \dots\}$, onde seus elementos são recuados entre chaves.

Usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &: \text{conjunto dos números naturais;}\\
\mathbb{Z} &: \text{conjunto dos números inteiros;}\\
\mathbb{Q} &: \text{conjunto dos números racionais;}\\
\mathbb{R} &: \text{conjunto dos números reais;}\\
\mathbb{C} &: \text{conjunto de números complexos.}
\end{aligned}$$

A notação $a \in A$ (ou $A \ni a$) significa que o elemento a pertence ao conjunto A. A notação $a \notin A$ (ou $A \not\ni a$) significa que o elemento a não pertence ao conjunto A.

Se cada um dos elementos de um conjunto B pertence a um conjunto A, diz-se que B é um subconjunto do conjunto A, e nesse caso escreve-se $B \subset A$ (ou $A \supset B$) (Fig. 4). Note que $\forall A$ verifica que $A \subset A$, uma vez que, naturalmente, todo elemento do conjunto A pertence a A. O conjunto vazio, ou seja, o conjunto que não contém nenhum elemento, é denotado pelo símbolo $\emptyset$. Qualquer conjunto contém o conjunto vazio como um de seus subconjuntos.

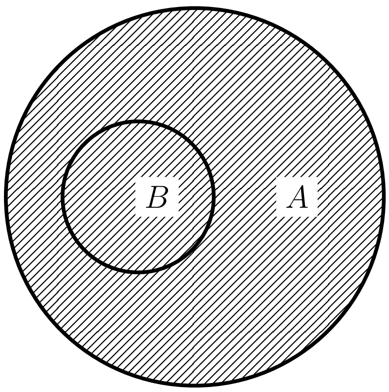

Fig. 4: $B \subset A$

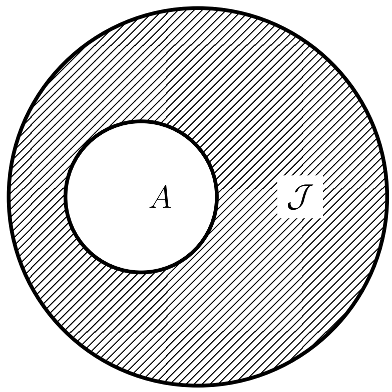

Fig. 5: $C_{\mathcal{J}}(A)$

Definição 2.1. Se $A \subset B \wedge B \subset A$, os conjuntos A e B são chamados *conjuntos iguais*, e é escrito $A = B$.

Definição 2.2. Seja $A \subset \mathcal{J}$. O conjunto de elementos do conjunto $\mathcal{J}$ que não pertencem a A, é chamado de *complemento* do conjunto A em relação ao conjunto $\mathcal{J}$ (Fig. 5).

O complemento do conjunto A em relação ao conjunto $\mathcal{J}$ é designado pelo símbolo $C_{\mathcal{J}}(A)$; também pode ser escrito de uma forma mais simples, $C(A)$, desde que se saiba em relação a qual conjunto o complemento é tomado. Por isso,

$$C_{\mathcal{J}}(A) = \{x : x \in \mathcal{J} \wedge x \notin A\}.$$

Se $A \subset \mathcal{J}$ e $B \subset \mathcal{J}$, o complemento do conjunto B em relação ao conjunto A é algumas vezes chamado de *diferença* dos conjuntos A e B e é representado por $A \backslash B$ (Fig. 6), ou seja,

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Seja que $A \subset \mathcal{J}$ e $B \subset \mathcal{J}$ então teremos as seguintes definições.

Definição 2.3. A *união* dos conjuntos A e B está dada pelo conjunto (Fig. 7)

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

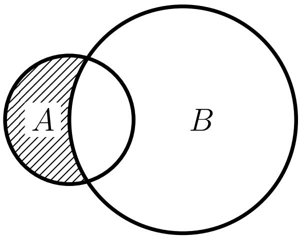

Fig. 6: $A \backslash B$

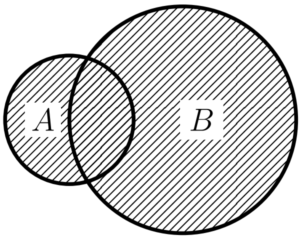

Fig. 7: $A \cup B$

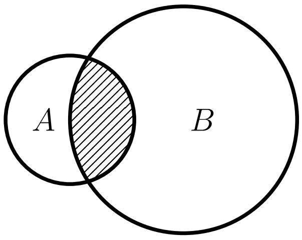

Fig. 8: $A \cap B$

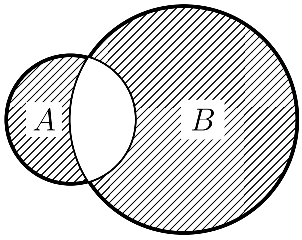

Fig. 9: $A \triangle B$

Por analogia, se A_j com $j = \overline{1, n}$ são subconjuntos do conjunto $\mathcal{J}$, a união dos conjuntos A_j é dada pelo conjunto

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}.$$

Definição 2.4. A *interseção* dos subconjuntos A e B é dada pelo conjunto (Fig. 8)

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Por analogia, se $A_j \subset \mathcal{J} \quad \forall j = \overline{1, n}$, a intersecção dos conjuntos A_j é dada pelo conjunto

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}.$$

Se cada elemento $\mu \in M$ é colocado em correspondência com um certo conjunto A_μ, diz-se que uma *família de conjuntos* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$, é definida. Neste caso, o conjunto

$$\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \{\text{todo } x \text{ tal que } x \in A_\mu \text{ pelo menos para algum } \mu \in M\ \},$$

é chamado de *união da família de conjuntos* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$. O conjunto

$$\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \{x : x \in A_\mu \quad \forall \mu \in M\},$$

é chamado *intersecção da família de conjuntos* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$.

Definição 2.5. O conjunto determinado pela união das diferenças $A \backslash B$ e $B \backslash A$ é chamado de *diferença simétrica* de dois conjuntos A e B (Fig. 9). A diferença simétrica é representada pelo conjunto

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Definição 2.6. Dois elementos a e b são chamados de *par ordenado* se for indicado qual desses elementos é o primeiro e qual é o segundo e, além disso, for verificado que $((a, b) = (c, d)) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$.

Um par ordenado de elementos a e b é denotado pelo símbolo (a, b). De forma semelhante, define-se um *sistema ordenado de* n *elementos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, que é designado pelo símbolo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados *coordenadas do sistema ordenado* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definição 2.7. O conjunto de todos os pares ordenados possíveis (a, b), onde $a \in A$, $b \in B$, é chamado de *produto cartesiano* dos conjuntos A e B e é denotado pelo símbolo $A \times B$.

Da mesma forma, o símbolo $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ designa o produto cartesiano dos conjuntos $A_j \in \mathcal{J}$, $j = \overline{1, n}$, ou seja, o conjunto de todos os sistemas ordenados possíveis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_j \in A_j$, $j = \overline{1, n}$.

3 Álgebra de Boole

Sejam A, B e D subconjuntos arbitrários do conjunto $\mathcal{J}$. Assim, das definições de união, interseção e complemento deduzem-se imediatamente as seguintes afirmações:

1) $A \cup B \subset \mathcal{J}$, $A \cap B \subset \mathcal{J}$ (caráter interno das operações de união e interseção);

2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (comutatividade das operações de união e interseção);

3) $A \cup (B \cup D) = (A \cup B) \cup D$, $A \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap D$ (associatividade das operações de união e interseção);

4) $A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$ (distributividade da operação de união em relação à operação de interseção);

5) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$ (distributividade da operação de interseção em relação à operação de união);

6) $A \cup A = A \cap A = A$;

7) $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$;

8) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \mathcal{J} = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \mathcal{J} = \mathcal{J}$;

9) $A \cup C(A) = \mathcal{J}$, $A \cap C(A) = \emptyset$.

Se para os elementos de um conjunto $\sigma = \{A, B, C, \dots\}$ são definidas as operações de união $\cup$ e interseção $\cap$, que verificam as relações $1) - 9)$, a terna $(\sigma, \cup, \cap)$ é chamada de *álgebra booleana*. Portanto, se σ é uma família de todas as partes do conjunto $\mathcal{J}$, então $(\sigma, \cup, \cap)$ é uma álgebra de Boole.

4 Princípio da dualidade

Para qualquer par de conjuntos A e B no conjunto $\mathcal{J}$ as igualdades são verificadas

$$C(A \cup B) = C(A) \cap C(B), \quad C(A \cap B) = C(A) \cup C(B) \tag{15}$$

As propriedades expressas pelas igualdades (15) são chamadas de *princípio da dualidade*. Verbalmente, essas igualdades podem ser declaradas da seguinte forma: *o complemento da união dos conjuntos é igual à interseção dos seus complementos, e o complemento da intersecção dos conjuntos é igual à união dos seus complementos*. O princípio da dualidade se estende sem qualquer dificuldade a um número arbitrário de subconjuntos A_μ. Neste caso

$$C\left(\bigcup_\mu A_\mu\right) = \bigcap_\mu C(A_\mu), \quad C\left(\bigcap_\mu A_\mu\right) = \bigcup_\mu C(A_\mu). \tag{16}$$

Ou seja, trocando a ordem em que o símbolo do complemento C e o símbolo *cup* (ou $\cap$) são escritos, este último se torna $\cap$ (correspondentemente, $\cup$).

5 Álgebra de conjuntos

Seja $\mathcal{J}$ um conjunto e $P(\mathcal{J})$, o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto de $\mathcal{J}$.

Definição 5.1. Uma família não vazia $R \subset P(\mathcal{J})$ onde a união, a interseção e a diferença de conjuntos são operações internas é chamada de *anel de conjuntos*.

Definição 5.2. Um conjunto E é chamado de *unidade da família de conjuntos* Σ se $E \in \Sigma$ e $\forall A \in \Sigma$ a igualdade $A \cap E = A$ é verdadeira.

Definição 5.3. Um anel de conjuntos que contém a unidade como um de seus elementos é chamado de *álgebra de conjuntos*.

Definição 5.4. Uma família de conjuntos $S \subset P(\mathcal{J})$ é chamada de *semianel* se contém o conjunto vazio e $\forall A \in S$ e $\forall A_1 \subset A$ existem conjuntos $A_2, A_3, \ldots, A_n \subset A$ tais que

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n = \bigsqcup_{\mu=1}^{n} A_\mu,$$

onde o símbolo $\sqcup$ designa a união de conjuntos disjuntos.

6 Exemplos

Exemplo 6.1. Demonstrar a validade das afirmações 1)-9) da seção 3.
Solução: 1) – conforme à definição 2.3, tem-se $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, e, por conseguinte, da inclusão $x \in A \cup B$ se deduz que $x \in \mathcal{J}$, ou seja, $A \cup B \subset \mathcal{J}$.

Analogamente, pela definição 2.4 temos que $x \in A \cap B$, então $x \in \mathcal{J}$, ou seja, $A \cap B \subset \mathcal{J}$.

2) – pela definição 2.3 e dado que $x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A$, temos

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in B\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in B \vee x \in A\} = B \cup A.$$

A segunda igualdade é demonstrada de modo análogo.

3) – Em virtude das propriedades do símbolo lógico $\vee$, tem-se:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup D) &= \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in (B \cup D)\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee (x \in B \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \vee x \in B) \vee x \in D\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in (A \cup B) \vee x \in D\} \\ &= (A \cup B) \cup D. \end{aligned}$$

A segunda igualdade é demonstrada de modo análogo.

4) – Neste caso temos que

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap D) &= \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in (B \cap D)\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup D)\} = (A \cup B) \cap (A \cup D). \end{aligned}$$

5) – Temos que

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup D) &= \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge (x \in B \cup D)\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge (x \in B \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap D)\} = (A \cap B) \cup (A \cap D). \end{aligned}$$

6) – Seja que $x \in A \cup A$, então $x \in A \wedge x \in A$, ou seja, $x \in A$, e , pelo tanto, é verificada a inclusão $A \cup A \subset A$. A inclusão $A \subset A \cup A$ é trivial, então pelas duas inclusões podemos concluir que $A \cup A = A$. A igualdade $A \cap A = A$ pode ser mostrada de forma análoga.

7) – Vamos supor como valida a igualdade $A \cup B = B$. Então

$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cup B \subset B) \Rightarrow (A \subset B).$$

Utilizando a inclusão anterior podemos ver que

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in B\} \supset \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in A\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A\} = A.$$

Além disso, é evidente que $A \cap B \subset A$, ou seja que temos

$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cap B = A).$$

Agora vamos considerar verdadeira a proposição $A \cap B = A$. Então

$$(A \cap B = A) \Rightarrow (A \subset A \cap B) \Rightarrow (A \subset B).$$

Agora, podemos utilizar a inclusão anterior

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in B\} \subset \{x \in \mathcal{J} : x \in B \vee x \in B\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in B\} = B.$$

Agora, como temos que $B \subset A \cup B$, então é evidente que

$$(A \cup B = B) \Leftarrow (A \cap B = A).$$

Finalmente podemos concluir que

$$(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A).$$

8) – Seja que $x \in A \cup \emptyset$, então $x \in A \vee x \in \emptyset$. Mas o conjunto $\emptyset$ não contem elementos, ou seja, $x \in A$, de onde temos a inclusão $A \cup \emptyset \subset A$. Evidentemente, $A \subset A \cup \emptyset$, finalmente teremos que $A \cup \emptyset = A$. Além disso, como $\emptyset \subset A \cap \emptyset \subset \emptyset \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$.

Dado que $A \subset \mathcal{J}$, teremos

$$A \cap \mathcal{J} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in \mathcal{J}\} \supset \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in A\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A\} = A.$$

Além disso também temos a inclusão $A \cap \mathcal{J} \subset A$. Finalmente obtemos que $A \cap \mathcal{J} = A$. Como conhecemos que $\mathcal{J} \subset A \cup \mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, então também teremos a igualdade $A \cup \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

9) – Pela propriedade 1) mostrada anteriormente teremos que $A \cup C(A) \subset \mathcal{J}$. Seja $x \in \mathcal{J}$, então se $x \in A \Rightarrow x \in A \cup C(A)$, no caso $x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$, ou seja, $x \in A \cup C(A)$, ou seja que $\mathcal{J} \subset A \cup C(A)$, e, pelo tanto, $A \cup C(A) = \mathcal{J}$.

Para demonstrar a igualdade $A \cap C(A) = \mathcal{J}$, provaremos que o conjunto $A \cap C(A)$ não contém nenhum elemento. De fato, de acordo com a igualdade $A \cup C(A) = \mathcal{J}$, qualquer elemento do conjunto $\mathcal{J}$ pertence a A ou a $C(A)$. Se $x \in A$, então $x \notin C(A)$ e, pelo tanto, $x \notin A \cap C(A)$. Por outro lado, si $x \in C(A)$, tem-se que $x \notin A$ e, novamente, $x \notin A \cap C(A)$. Então como o conjunto $A \cap C(A)$ não contem nenhum elemento, este conjunto é vazio, o seja, $A \cap C(A) = \emptyset$ □

Exemplo 6.2. Demonstrar o princípio da dualidade.
Solução: Vamos demonstrar a primeira das igualdades; a segunda pode ser demonstrada de forma análoga. Seja que $x \in C(A \cup B)$, então teremos que $x \notin A \cup B$, ou seja, que $x \notin A \wedge x \notin B$.

Claramente, pela afirmação anterior teremos que $x \in C(a) \wedge x \in C(b) \Rightarrow x \in C(A) \cap C(B)$, ou seja, temos que

$$C(A \cup B) \subset C(A) \cap C(B).$$

Suponhamos agora que $x \in C(A) \cap C(B)$, então teremos que $x \in C(A) \wedge x \in C(B)$, de onde obtemos que $x \notin A \wedge x \notin B$. Claramente temos que $x \notin A \cup B \Rightarrow x \in C(A \cup B)$. Agora podemos afirmar que

$$C(A \cup B) \supset C(A) \cap C(B).$$

Finalmente, levando em consideração as duas inclusões, é evidente pela definição 2.1 que

$$C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$$

□

Exemplo 6.3. Demonstrar as igualdades:

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$$

Solução: Utilizando as propriedades 4), 5) e 6) do exemplo 6.1, obtemos:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

Agora temos que demonstrar que, por exemplo, $A \cap (A \cup B) = A$. Seja que $x \in A \cap (A \cup B)$, então temos que $x \in A \wedge x \in (A \cup B)$, ou seja, é claro que é válida a inclusão $A \cap (A \cup B) \subset A$. Mas se $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B)$, ou seja que, $A \subset A \cap (A \cup B)$. Finalmente temos que $A = A \cap (A \cup B)$ □

Exemplo 6.4. Demonstrar a validade da inclusão

$$(A \backslash B) \subset (A \backslash D) \cup (D \backslash B).$$

Solução: Seja que $x \in (A \backslash B)$, então teremos que $x \in A \wedge x \notin B$. Se, além temos que $x \in D$, então $x \in (D \backslash B)$ e, pelo tanto, $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$. No caso em que $x \notin D$, teremos que, $x \in (A \backslash D)$ e, pelo tanto, $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$. Em ambos os casos, $x \in D$ como $x \notin D$, da condição $x \in (A \backslash B)$ teremos que $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$, ou seja, teremos que $(A \backslash B) \subset (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$. □

Exemplo 6.5. Mostre que uma família R onde união e diferença são definidas como operações internas é um anel.
Solução: Sejam A e B conjuntos arbitrários da família R. Dado que $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$ e $A \subset R$, $A \backslash B \subset R$ então $A \cap B \subset R$. Portanto, as operações de união, intersecção e diferença são operações internas em R, ou seja, a família R é um anel. □

Exemplo 6.6. Mostre que uma família $R = \{\alpha, \emptyset\}$, composta de um conjunto não vazio α e do conjunto vazio $\emptyset$, forma um anel. Esta família é uma álgebra?
Solução: A união $\alpha \cup \emptyset = \alpha$ e as diferenças $\alpha \backslash \emptyset = \alpha$, $\emptyset \backslash \alpha = \emptyset$ também são elementos da família R. Ou seja, união e diferença são operações internas em R, ou seja, conforme o exemplo 6.5, é um anel. Como o elemento $\alpha \in R$ contém todos os outros conjuntos da família R, α é a unidade da família e R, uma álgebra. □

Exemplo 6.7. Demonstrar que

$$(A \cap B) \times (D \cap E) = (A \times D) \cap (B \times E).$$

Solução: Seja $(x, y) \in (A \cap B) \times (D \cap E)$, então $x \in A \cap B$ e $y \in D \cap E$, o que é equivalente com $x \in A \wedge x \in B$ e $y \in D \wedge y \in E$. Dado que $x \in A \wedge y \in D$, tem-se que $(x, y) \in A \times D$. Analogamente, de $x \in B \wedge y \in E$ temos que $(x, y) \in B \times E$. Dado modo que $(x, y) \in (A \times D) \cap (B \times E)$ e

$$(A \cap B) \times (D \cap E) \subset (A \times D) \cap (B \times E).$$

Suponha agora que $(x, y) \in ((A \times D) \cap (B \times E))$. Neste casso temos, $(x, y) \in (A \times D) \wedge (x, y) \in (B \times E)$ e, pelo tanto, $x \in A \wedge y \in D$ e $x \in B \wedge y \in E$. Pelo tanto, $x \in (A \cap B)$ e $y \in (D \cap E)$, ou seja que, $(x, y) \in ((A \cap B) \times (D \cap E))$ e é verificada a inclusão

$$(A \cap B) \times (D \cap E) \supset (A \times D) \cap (B \times E).$$

Finalmente queda claro, utilizando as duas inclusões, que

$$(A \cap B) \times (D \cap E) = (A \times D) \cap (B \times E).$$

$\square$