Física Além da Sala de Aula (FASA - 2025)

A Dança dos Números: Introdução à Análise Matemática

Versão: 13/06/2025.

Sumário

1 Símbolos lógicos

1.1 Proposições e operadores lógicos

Uma *proposição* é toda afirmação sobre a qual faz sentido dizer que é verdadeira ou falsa. A partir das proposições e com a ajuda dos *operadores lógicos*, podem-se formar novas proposições.

Há diversos operadores lógicos; vamos analisar aqueles que usaremos em nosso curso.

1) A operação de negação corresponde, na linguagem cotidiana, à partícula "não". Para cada proposição p, podemos formar uma nova proposição $\overline{p}$ (lida como "p com barra" ou "não p"), que é verdadeira quando p é falsa e falsa quando p é verdadeira. A proposição $\overline{p}$ é chamada de *negação* de p.

   Exemplo 1.1. Para a proposição "a matéria escura existe", a negação seria "a matéria escura não existe".

2) A proposição composta por duas proposições p e q, unidas pela conjunção "e", é chamada de *conjunção* e é representada por $p \wedge q$ (lê-se: "p e q").

   A conjunção $p \wedge q$ é considerada uma proposição verdadeira somente quando ambas as proposições p e q são verdadeiras.

3) Se a proposição é formada pelas proposições p e q com a conjunção "ou", ela é chamada de *disjunção* das proposições p e q e é representada por $p \vee q$ (lê-se: "p ou q").

   A disjunção $p \vee q$ é considerada uma proposição verdadeira somente quando pelo menos uma das proposições p ou q for verdadeira.

4) A proposição formada pelas proposições p e q com a expressão "se ..., então ..." é chamada de *implicação* e é representada por $p \to q$ (lê-se: "se p, então q"). Nessa proposição, p é chamada de *condição*, enquanto q é chamada de *conclusão*.

   A implicação $p \to q$ é considerada uma proposição falsa somente quando a condição (p) é verdadeira e a conclusão (q) é falsa.

5) A proposição formada pelas proposições p e q com a expressão "quando e somente quando ..." é chamada de *equivalência* (ou *implicação dupla*) e é representada por $p \leftrightarrow q$.

   A equivalência $p \leftrightarrow q$ é verdadeira somente quando ambas as proposições p e q são verdadeiras ou ambas são falsas.

Se atribuímos a número 1 às proposições verdadeiras e 0 às falsas, as operações lógicas $\overline{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$ e $p \leftrightarrow q$ podem ser definidas formalmente por meio das seguintes tabelas-verdade:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Fig. 1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Fig. 2

Novas proposições podem ser formadas por meio de diversas operações lógicas, com a particularidade de que cada operação pode ser utilizada várias vezes. A ordem em que as operações devem ser realizadas é indicada pelo uso de parênteses.

Nas tabelas de verdade da implicação, observamos que, se a condição p e a implicação $p \to q$ são verdadeiras, então a conclusão q também será verdadeira. Nesse caso, escreve-se $p \Rightarrow q$ e diz-se que q se deduz de p. Essa regra clássica de dedução é amplamente utilizada em matemática.

Se de p se deduz q e de q se deduz p, então as proposições p e q são chamadas de equivalentes. As proposições equivalentes podem ser expressas usando o símbolo $\Leftrightarrow$ ou o símbolo de igualdade, ou seja, escreve-se $p \Leftrightarrow q$ ou simplesmente $p = q$.

Durante a investigação das proposições em relação à equivalência, nos casos mais simples, é possível utilizar tabelas de verdade. Isso ocorre porque, para proposições equivalentes escritas de formas diferentes, as tabelas de verdade coincidem.

Exemplo 1.2. Utilizando as tabelas de verdade para a negação e a implicação, é fácil construir a tabela de verdade para proposições da forma $\overline{q} \to \overline{p}$:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Fig. 3

Essa tabela coincide com a tabela de verdade para a implicação $p \to q$. Portanto, as proposições $p \to q$ e $\overline{q} \to \overline{p}$ são equivalentes, ou seja, $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$ ou, de forma equivalente, $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$.

A tabela de verdade correspondente à proposição formada por n proposições simples contém 2^n linhas. Por essa razão, a equivalência das proposições é estabelecida por outro procedimento: uma certa quantidade de equivalências básicas (leis da álgebra proposicional) é verificada a partir das tabelas de verdade. As igualdades são estabelecidas da mesma forma que na álgebra elementar, onde, nas transformações idênticas, são utilizadas as leis algébricas: comutativa, associativa, distributiva e outras.

Leis fundamentais da álgebra proposicional:

1) lei da comutatividade da disjunção:

$$p \vee q = q \vee p. \tag{1}$$

2) lei da comutatividade da conjunção:

$$p \wedge q = q \wedge p. \tag{2}$$

3) lei da associatividade da disjunção:

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r. \tag{3}$$

4) lei da associatividade da conjunção:

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r. \tag{4}$$

5) Primeira lei distributiva:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \tag{5}$$

6) Segunda lei distributiva:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r). \tag{6}$$

7) Lei de Morgan:

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}, \quad \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \tag{7}$$

8) Lei da negação da negação:

$$\overline{\overline{p}} = p. \tag{8}$$

9) Leis de idempotência

$$p \vee p = p, \quad p \wedge p = p. \tag{9}$$

Em lógica, as proposições *identicamente verdadeiras* ou *identicamente falsas* desempenham um papel importante. As proposições identicamente verdadeiras são sempre verdadeiras, independentemente de se as proposições que as formam são verdadeiras ou falsas.

Exemplo 1.3. A proposição $p \vee \overline{p}$ é identicamente verdadeira.

Designaremos as proposições identicamente verdadeiras com a letra i.

As proposições identicamente falsas sempre o são, ou seja, independentemente da veracidade ou falsidade das proposições que as formam. Tais proposições são designadas com a letra l.

Exemplo 1.4. $p \wedge \overline{p} = l$, já que $p \wedge \overline{p}$ é sempre falsa, independentemente se p é verdadeiro ou falso.

Para as proposições identicamente verdadeiras e identicamente falsa, com todo p são certas as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} p \vee \overline{p} = i, &\quad p \wedge \overline{p} = l, \\ p \vee i = i, &\quad p \wedge i = p, \\ p \vee l = p, &\quad p \wedge l = l, \quad \overline{i} = l. \end{aligned} \tag{10}$$

As leis (1) - (10) da álgebra proposicional descrevem as propriedades de três operações: disjunção, conjunção e negação. A implicação e a equivalência podem ser expressas através da disjunção, conjunção e negação pelas seguintes fórmulas:

$$p \to q = \overline{p} \vee q, \tag{11}$$

$$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}). \tag{12}$$

Exemplo 1.5. Demonstrar a equivalência

$$\overline{p \to q} = p \wedge \overline{q}.$$

Solução: Utilizando a igualdade (11), a lei de Morgan e a negação da negação obtemos

$$\overline{p \to q} = \overline{\overline{p} \vee q} = \overline{\overline{p}} \wedge \overline{q} = p \wedge \overline{q}$$

□

Exemplo 1.6. Brown, Jones e Smith se acusam de serem cúmplices em um assalto a um banco. Os ladrões fugiram em um carro que os esperava. Durante a investigação, Brown afirmou que os criminosos fugiram em um Buick azul, Jones disse que o carro era um Chrysler preto, e Smith afirmou que era um Ford Mustang, mas de maneira alguma azul. Ficou evidente que, querendo dificultar a investigação, cada um deles indicou corretamente apenas a marca do carro ou a cor, mas não ambos. Qual era a marca e a cor do carro?
Solução: Vamos examinar as proposições

- p – carro de cor azul,
- q – carro de marca Buick,
- r – carro de cor preto,
- s – carro de marca Crysler,
- l – carro de marca Ford Mustang.

Pelas declarações de Brown, Jones e Smith se deduz, correspondentemente, que as proposições $p \vee q$, $r \vee s$, $\overline{p} \vee l$ são verdadeiras. Então

$$(p \vee q)(r \vee s)(\overline{p} \vee l), \tag{13}$$

é verdadeiro. Abrindo os parênteses, obtemos a disjunção de oito conjunções:

$$(p \wedge r \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge r \wedge l) \vee (p \wedge s \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge s \wedge l) \vee (q \wedge \overline{r} \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge l) \vee (q \wedge \overline{s} \wedge p) \vee (q \wedge s \wedge l). \tag{14}$$

Da formulação, conclui-se que todas as conjunções, exceto a quinta, são falsas. Portanto, a disjunção só pode ser verdadeira sob a condição de que a proposição $p \wedge q \wedge \overline{p}$ seja verdadeira, o que significa que os criminosos fugiram em um Buick preto. □

1.2 Predicados

Em matemática e em outras ciências, além das proposições, deparamo-nos com diversos enunciados que dependem de uma variável pertencente a um conjunto. Em lógica, esses enunciados são chamados de predicados. O predicado $p(x)$, com $x \in U$, de modo geral, não é uma proposição. No entanto, supõe-se que, para cada elemento fixo $x_0 \in U$, o predicado $p(x_0)$ seja uma proposição.

O conjunto U, no qual se define o predicado $p(x)$, pode ser dividido em dois subconjuntos. Um deles contém aqueles, e somente aqueles, elementos de U para os quais $p(x)$ é verdadeiro. Esse subconjunto recebe o nome de *conjunto de verdade* do predicado $p(x)$. O outro subconjunto é formado pelos elementos de U para os quais $p(x)$ é falso. Se o primeiro desses subconjuntos é denotado por P, então o segundo deve ser indicado por $C_U(P)$, pois é o complemento de P no conjunto U.

Exemplo 1.7. Para o predicado $p(x) : x^2 - x < 0$, com $x \in \mathbb{R}$, o intervalo $]0, 1[$ é o conjunto de verdade P. A união dos intervalos $]-\infty, 0]$ e $[1, +\infty[$ — isto é, o complemento do intervalo $]0, 1[$ na reta real — constitui o conjunto $C_{\mathbb{R}}(P)$.

Exemplo 1.8. Considere o predicado $p(x) : \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$, com $x \in \mathbb{R}$. O conjunto de verdade P é o intervalo $[2, +\infty[$, pois a raiz quadrada está definida apenas para $x \geq 2$. O complemento de P no conjunto $\mathbb{R}$, isto é, $C_{\mathbb{R}}(P)$, é o intervalo $]-\infty, 2[$, onde o predicado é falso.

Definição 1.1. Dois predicados $p(x)$ e $q(x)$, definidos sobre o mesmo conjunto, dizem-se *equivalentes* se os seus conjuntos de verdade coincidem.

Exemplo 1.9. Considere os predicados $p(x) : x^2 - 5x + 6 < 0$ e $q(x) : x^4 - 5x^3 + 6x^2 < 0$, ambos definidos sobre $\mathbb{R}$. Esses predicados são equivalentes, pois o conjunto de verdade de cada um deles é o intervalo $]2, 3[$.

Exemplo 1.10. Considere os predicados $p(n)$: n é divisível por 6 e $q(n)$: n é divisível por 2 e por 3, definidos sobre o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Esses predicados são equivalentes, pois todo número inteiro divisível por 6 é também divisível por 2 e por 3, e vice-versa. Assim, os conjuntos de verdade de $p(n)$ e $q(n)$ coincidem.

Para os predicados que dependem de uma variável, assim como para as proposições, introduzem-se operações lógicas.

Definição 1.2. Chama-se *negação* do predicado $p(x)$, com $x \in U$, o predicado definido no mesmo conjunto U que se torna uma proposição verdadeira para aqueles, e somente aqueles, valores de x para os quais $p(x)$ é falso.

A negação de $p(x)$ é denotada por $\overline{p(x)}$. Se P é o conjunto de verdade de $p(x)$, então o conjunto de verdade de $\overline{p(x)}$ será o complemento $C_U(P)$.

1.3 Quantificadores

Com predicados dependentes das variáveis, estão associados dois tipos de afirmações que se encontram frequentemente:

1. O predicado $p(x)$, com $x \in U$, torna-se uma proposição verdadeira para todos os elementos do conjunto U.

2. O predicado $p(x)$, com $x \in U$, torna-se uma proposição verdadeira para pelo menos um dos elementos do conjunto U.

Essas afirmações costumam ser escritas de forma abreviada, utilizando sinais especiais: o *sinal de universalidade* $\forall$ (a primeira letra invertida da palavra inglesa *All* — tudo) e o *sinal existencial* $\exists$ (a primeira letra invertida da palavra inglesa *Exists* — existe). Em lógica, os sinais $\forall$ e $\exists$ recebem o nome de *quantificadores*. O quantificador universal $\forall$ corresponde às expressões "todo", "qualquer", "cada"; o quantificador existencial $\exists$ corresponde às expressões "pelo menos um", "existe", "há".

Ao utilizar os símbolos $\forall$ e $\exists$, podemos escrever as afirmações 1 e 2 da seguinte forma:

$$1.\ \forall x\ p(x), x \in U. \quad 2.\ \exists x\ p(x), x \in U.$$

Cada um desses predicados é ou verdadeiro, ou falso e, portanto, constitui uma proposição. As regras para construir as negações de proposições que contêm quantificadores são estabelecidas pelas seguintes fórmulas:

$$\overline{\forall x\ p(x)} = \exists x\ \overline{p(x)}, \quad \overline{\exists x\ p(x)} = \forall x\ \overline{p(x)}. \tag{15}$$

A primeira fórmula significa que $p(x)$ não é verdadeira para todos os x se, e somente se, existe um x para o qual $p(x)$ é falsa. A segunda fórmula indica que não existe um x para o qual $p(x)$ seja verdadeira se, e somente se, $p(x)$ é falsa para todos os x.

Definição 1.3. O elemento x_0 do conjunto U, para o qual o predicado $p(x)$ não é verdadeiro, recebe o nome de *contraexemplo* para a proposição $\forall x\ p(x)$.

Assim, para verificar a falsidade da proposição $\forall x\ p(x)$, é suficiente encontrar (ou, como também se diz, *construir*) um contraexemplo.

1.4 Método da Indução Matemática

Em muitas áreas da matemática, é necessário demonstrar a veracidade de predicados $p(n)$ definidos em um conjunto de números naturais para todos os valores da variável, ou seja, a veracidade da proposição

$$\forall n\, p(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Com frequência, isso pode ser feito utilizando o *método da indução matemática*. Esse método baseia-se no chamado *princípio da indução matemática* (ou *axioma da indução*), que pode ser enunciado da seguinte forma:

O predicado $p(n)$ é considerado verdadeiro para todos os valores naturais da variável se forem satisfeitas as duas condições seguintes:

1. O predicado $p(n)$ é verdadeiro para $n = 1$. (base da indução)

2. Da suposição de que $p(n)$ é verdadeiro para $n = k$ (onde k é um número natural arbitrário), segue-se que também é verdadeiro para o valor seguinte $n = k + 1$. (passo indutivo)

Por método da indução matemática entende-se o seguinte método de demonstração: Se é necessário demonstrar a veracidade do predicado $p(n)$ para todos os valores naturais de n, começa-se por verificar a veracidade da proposição $p(1)$ e, em seguida, supondo verdadeira a proposição $p(k)$, demonstra-se a veracidade da proposição $p(k + 1)$.

Se essa demonstração for válida para todo valor natural de k, então, de acordo com o princípio da indução matemática, o predicado $p(n)$ será verdadeiro para todos os valores de n.

Exemplo 1.11. Demonstre que

$$S_n = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Solução: A igualdade é o predicado $p(n)$ $n \in \mathbb{N}$. Vamos demonstrar a veracidade de $p(n)$ para todos os valores de n segundo o princípio de indução matemática.

1. *base da indução:* A proposição $p(1)$ é verdadeira, já que

$$(-1)^{1-1}1^2 = (-1)^{1-1}\frac{1(1+1)}{2}.$$

2. *passo indutivo:* Suponha que $p(k)$ é verdadeiro, ou seja, é valida a igualdade

$$S_k = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}.$$

Agora, vamos considerar $S_{k+1} = S_k + (-1)^k(k + 1)^2$, ou seja,

$$S_{k+1} = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k\left[(k+1) - \frac{k}{2}\right](k+1).$$

Finalmente temos que

$$S_{k+1} = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

o que significa que $p(k + 1)$ é verdadeiro. Então, o razonamento é verdade com $k \in \mathbb{N}$.

Em correspondência com o principio da indução matemática a igualdade inicial é verdadeira.

$\square$

Exemplo 1.12. Demonstrar a desigualdade de Bernoulli.

$$(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha, \quad \alpha > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Solução:

1. *base da indução:* Com $n=1$ obtemos uma proposição verdadeira

$$1+\alpha \geq 1+\alpha$$

2. *passo indutivo:* Suponha que a desigualdade é verdadeira com $n=k$, ou seja, $(1+\alpha)^k \geq 1+k\alpha$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $1+\alpha$ (esto é possível pois $\alpha > -1$), obtemos

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq (1+k\alpha)(1+\alpha) \geq 1+(k+1)\alpha + k\alpha^2.$$

Considerando que $k\alpha^2 \geq 0$, concluímos que

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+(k+1)\alpha.$$

Assim, ao supor a desigualdade certa para certo $n=k$, chegamos à conclusão que é certa para $n=k+1$. É evidente que a demonstração será valida para qualquer valor de $k \in \mathbb{N}$. Então a desigualdade fica demonstrada.

$\square$

Exemplo 1.13. Demonstrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o número $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ é múltiplo de 19.
Solução:

1. *base da indução:* Com $n=1$ teremos que $5 \cdot 2 + 3^2 = 19$, o que indica que a afirmação é certa.

2. *passo indutivo:* Suponha que é certa a afirmação com $n=k$, ou seja, suponhamos que

$$5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$$

é múltiplo de 19. Então, como

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} = 8\left(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}\right) + 19 \cdot 3^{3k-1},$$

a afirmação também é certa com $n=k+1$. Em efeito, o primeiro adendo do segundo membro da igualdade divide por 19 devido à suposição indutiva; o segundo é também múltiplo de 19

$\square$

2 Operações com conjuntos

O conceito matemático de um conjunto de elementos é considerado intuitivo. Um conjunto é definido por uma regra ou critério segundo o qual é determinado se um dado elemento pertence ou não ao conjunto.

Os conjuntos são designados pelo símbolo $A = \{x\}$, onde x é a notação geral para todos os elementos do conjunto A. Os conjuntos são frequentemente escritos na forma $A = \{a, b, \dots\}$, onde seus elementos são recuados entre chaves.

Usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &: \text{conjunto dos números naturais;}\\
\mathbb{Z} &: \text{conjunto dos números inteiros;}\\
\mathbb{Q} &: \text{conjunto dos números racionais;}\\
\mathbb{R} &: \text{conjunto dos números reais;}\\
\mathbb{C} &: \text{conjunto de números complexos.}
\end{aligned}$$

A notação $a \in A$ (ou $A \ni a$) significa que o elemento a pertence ao conjunto A. A notação $a \notin A$ (ou $A \not\ni a$) significa que o elemento a não pertence ao conjunto A.

Se cada um dos elementos de um conjunto B pertence a um conjunto A, diz-se que B é um subconjunto do conjunto A, e nesse caso escreve-se $B \subset A$ (ou $A \supset B$) (Fig. 4). Note que $\forall A$ verifica que $A \subset A$, uma vez que, naturalmente, todo elemento do conjunto A pertence a A. O conjunto vazio, ou seja, o conjunto que não contém nenhum elemento, é denotado pelo símbolo $\emptyset$. Qualquer conjunto contém o conjunto vazio como um de seus subconjuntos.

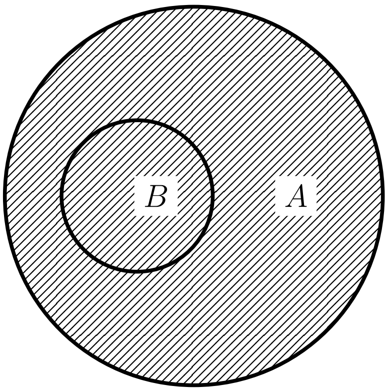

Fig. 4: $B \subset A$

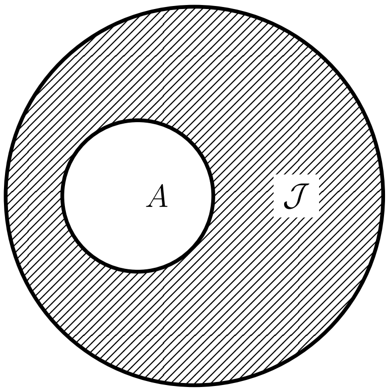

Fig. 5: $C_{\mathcal{J}}(A)$

Definição 2.1. Se $A \subset B \wedge B \subset A$, os conjuntos A e B são chamados *conjuntos iguais*, e é escrito $A = B$.

Definição 2.2. Seja $A \subset \mathcal{J}$. O conjunto de elementos do conjunto $\mathcal{J}$ que não pertencem a A, é chamado de *complemento* do conjunto A em relação ao conjunto $\mathcal{J}$ (Fig. 5).

O complemento do conjunto A em relação ao conjunto $\mathcal{J}$ é designado pelo símbolo $C_{\mathcal{J}}(A)$; também pode ser escrito de uma forma mais simples, $C(A)$, desde que se saiba em relação a qual conjunto o complemento é tomado. Por isso,

$$C_{\mathcal{J}}(A) = \{x : x \in \mathcal{J} \wedge x \notin A\}.$$

Se $A \subset \mathcal{J}$ e $B \subset \mathcal{J}$, o complemento do conjunto B em relação ao conjunto A é algumas vezes chamado de *diferença* dos conjuntos A e B e é representado por $A \backslash B$ (Fig. 6), ou seja,

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Seja que $A \subset \mathcal{J}$ e $B \subset \mathcal{J}$ então teremos as seguintes definições.

Definição 2.3. A *união* dos conjuntos A e B está dada pelo conjunto (Fig. 7)

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

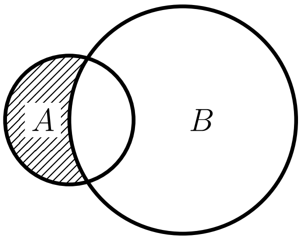

Fig. 6: $A \backslash B$

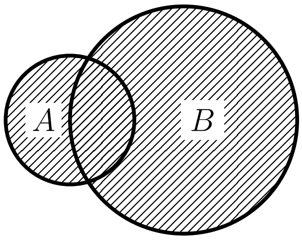

Fig. 7: $A \cup B$

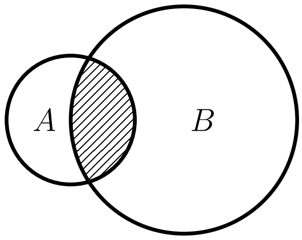

Fig. 8: $A \cap B$

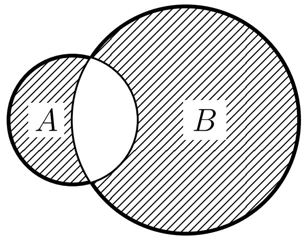

Fig. 9: $A \bigtriangleup B$

Por analogia, se A_j com $j = \overline{1,n}$ são subconjuntos do conjunto $\mathcal{J}$, a união dos conjuntos A_j é dada pelo conjunto

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}.$$

Definição 2.4. A *interseção* dos subconjuntos A e B é dada pelo conjunto (Fig. 8)

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Por analogia, se $A_j \subset \mathcal{J} \quad \forall j = \overline{1,n}$, a intersecção dos conjuntos A_j é dada pelo conjunto

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}.$$

Se cada elemento $\mu \in M$ é colocado em correspondência com um certo conjunto A_μ, diz-se que uma *família de conjuntos* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$, é definida. Neste caso, o conjunto

$$\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \{\text{todo } x \text{ tal que } x \in A_\mu \text{ pelo menos para algum } \mu \in M\ \},$$

é chamado de *união da família de conjuntos* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$. O conjunto

$$\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \{x : x \in A_\mu \quad \forall \mu \in M\},$$

é chamado *intersecção da família de conjuntos* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$.

Definição 2.5. O conjunto determinado pela união das diferenças $A \backslash B$ e $B \backslash A$ é chamado de *diferença simétrica* de dois conjuntos A e B (Fig. 9). A diferença simétrica é representada pelo conjunto

$$A \bigtriangleup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Definição 2.6. Dois elementos a e b são chamados de *par ordenado* se for indicado qual desses elementos é o primeiro e qual é o segundo e, além disso, for verificado que $((a,b) = (c,d)) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$.

Um par ordenado de elementos a e b é denotado pelo símbolo (a, b). De forma semelhante, define-se um *sistema ordenado de n elementos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, que é designado pelo símbolo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados *coordenadas do sistema ordenado* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definição 2.7. O conjunto de todos os pares ordenados possíveis (a, b), onde $a \in A$, $b \in B$, é chamado de *produto cartesiano* dos conjuntos A e B e é denotado pelo símbolo $A \times B$.

Da mesma forma, o símbolo $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ designa o produto cartesiano dos conjuntos $A_j \in \mathcal{J}$, $j = \overline{1, n}$, ou seja, o conjunto de todos os sistemas ordenados possíveis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_j \in A_j$, $j = \overline{1, n}$.

2.1 Álgebra de Boole

Sejam A, B e D subconjuntos arbitrários do conjunto $\mathcal{J}$. Assim, das definições de união, interseção e complemento deduzem-se imediatamente as seguintes afirmações:

1) $A \cup B \subset \mathcal{J}$, $A \cap B \subset \mathcal{J}$ (caráter interno das operações de união e interseção);

2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (comutatividade das operações de união e interseção);

3) $A \cup (B \cup D) = (A \cup B) \cup D$, $A \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap D$ (associatividade das operações de união e interseção);

4) $A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$ (distributividade da operação de união em relação à operação de interseção);

5) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$ (distributividade da operação de interseção em relação à operação de união);

6) $A \cup A = A \cap A = A$;

7) $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$;

8) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \mathcal{J} = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \mathcal{J} = \mathcal{J}$;

9) $A \cup C(A) = \mathcal{J}$, $A \cap C(A) = \emptyset$.

Se para os elementos de um conjunto $\sigma = \{A, B, C, \ldots\}$ são definidas as operações de união $\cup$ e interseção $\cap$, que verificam as relações $1) - 9)$, a terna $(\sigma, \cup, \cap)$ é chamada de *álgebra booleana*. Portanto, se σ é uma família de todas as partes do conjunto $\mathcal{J}$, então $(\sigma, \cup, \cap)$ é uma álgebra de Boole.

2.2 Princípio da dualidade

Para qualquer par de conjuntos A e B no conjunto $\mathcal{J}$ as igualdades são verificadas

$$C(A \cup B) = C(A) \cap C(B), \quad C(A \cap B) = C(A) \cup C(B) \tag{16}$$

As propriedades expressas pelas igualdades (16) são chamadas de *princípio da dualidade*. Verbalmente, essas igualdades podem ser declaradas da seguinte forma: *o complemento da união dos conjuntos é igual à interseção dos seus complementos, e o complemento da intersecção dos* *conjuntos é igual à união dos seus complementos.* O princípio da dualidade se estende sem qualquer dificuldade a um número arbitrário de subconjuntos A_μ. Neste caso

$$C\left(\bigcup_\mu A_\mu\right) = \bigcap_\mu C(A_\mu), \quad C\left(\bigcap_\mu A_\mu\right) = \bigcup_\mu C(A_\mu). \tag{17}$$

Ou seja, trocando a ordem em que o símbolo do complemento C e o símbolo $\cup$ (ou $\cap$) são escritos, este último se torna $\cap$ (correspondentemente, $\cup$).

2.3 Álgebra de conjuntos

Seja $\mathcal{J}$ um conjunto e $P(\mathcal{J})$, o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto de $\mathcal{J}$.

Definição 2.8. Uma família não vazia $R \subset P(\mathcal{J})$ onde a união, a interseção e a diferença de conjuntos são operações internas é chamada de *anel de conjuntos.*

Definição 2.9. Um conjunto E é chamado de *unidade da família de conjuntos* Σ se $E \in \Sigma$ e $\forall A \in \Sigma$ a igualdade $A \cap E = A$ é verdadeira.

Definição 2.10. Um anel de conjuntos que contém a unidade como um de seus elementos é chamado de *álgebra de conjuntos.*

Definição 2.11. Uma família de conjuntos $S \subset P(\mathcal{J})$ é chamada de *semianel* se contém o conjunto vazio e $\forall A \in S$ e $\forall A_1 \subset A$ existem conjuntos $A_2, A_3, \ldots, A_n \subset A$ tais que

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n = \bigsqcup_{\mu=1}^{n} A_\mu,$$

onde o símbolo $\sqcup$ designa a união de conjuntos disjuntos.

2.4 Exemplos

Exemplo 2.1. Demonstrar a validade das afirmações 1)-9) da seção 2.1.
Solução: 1) – conforme à definição 2.3, tem-se $A\cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, e, por conseguinte, da inclusão $x \in A \cup B$ se deduz que $x \in \mathcal{J}$, ou seja, $A \cup B \subset \mathcal{J}$.

Analogamente, pela definição 2.4 temos que $x \in A \cap B$, então $x \in \mathcal{J}$, ou seja, $A \cap B \subset \mathcal{J}$.

2) – pela definição 2.3 e dado que $x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A$, temos

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in B\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in B \vee x \in A\} = B \cup A.$$

A segunda igualdade é demonstrada de modo análogo.

3) – Em virtude das propriedades do símbolo lógico $\vee$, tem-se:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup D) &= \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in (B \cup D)\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee (x \in B \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \vee x \in B) \vee x \in D\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in (A \cup B) \vee x \in D\} \\ &= (A \cup B) \cup D. \end{aligned}$$

A segunda igualdade é demonstrada de modo análogo.

4) – Neste caso temos que

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap D) &= \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in (B \cap D)\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup D)\} = (A \cup B) \cap (A \cup D). \end{aligned}$$

5) – Temos que

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup D) &= \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge (x \in B \cup D)\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge (x \in B \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap D)\} = (A \cap B) \cup (A \cap D). \end{aligned}$$

6) – Seja que $x \in A \cup A$, então $x \in A \wedge x \in A$, ou seja, $x \in A$, e , pelo tanto, é verificada a inclusão $A \cup A \subset A$. A inclusão $A \subset A \cup A$ é trivial, então pelas duas inclusões podemos concluir que $A \cup A = A$. A igualdade $A \cap A = A$ pode ser mostrada de forma análoga.

7) – Vamos supor como valida a igualdade $A \cup B = B$. Então

$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cup B \subset B) \Rightarrow (A \subset B).$$

Utilizando a inclusão anterior podemos ver que

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in B\} \supset \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in A\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A\} = A.$$

Além disso, é evidente que $A \cap B \subset A$, ou seja que temos

$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cap B = A).$$

Agora vamos considerar verdadeira a proposição $A \cap B = A$. Então

$$(A \cap B = A) \Rightarrow (A \subset A \cap B) \Rightarrow (A \subset B).$$

Agora, podemos utilizar a inclusão anterior

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in B\} \subset \{x \in \mathcal{J} : x \in B \vee x \in B\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in B\} = B.$$

Agora, como temos que $B \subset A \cup B$, então é evidente que

$$(A \cup B = B) \Leftarrow (A \cap B = A).$$

Finalmente podemos concluir que

$$(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A).$$

8) – Seja que $x \in A \cup \emptyset$, então $x \in A \vee x \in \emptyset$. Mas o conjunto $\emptyset$ não contem elementos, ou seja, $x \in A$, de onde temos a inclusão $A \cup \emptyset \subset A$. Evidentemente, $A \subset A \cup \emptyset$, finalmente teremos que $A \cup \emptyset = A$. Além disso, como $\emptyset \subset A \cap \emptyset \subset \emptyset \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$.

Dado que $A \subset \mathcal{J}$, teremos

$$A \cap \mathcal{J} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in \mathcal{J}\} \supset \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in A\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A\} = A.$$

Além disso também temos a inclusão $A \cap \mathcal{J} \subset A$. Finalmente obtemos que $A \cap \mathcal{J} = A$. Como conhecemos que $\mathcal{J} \subset A \cup \mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, então também teremos a igualdade $A \cup \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

9) – Pela propriedade 1) mostrada anteriormente teremos que $A \cup C(A) \subset \mathcal{J}$. Seja $x \in \mathcal{J}$, então se $x \in A \Rightarrow x \in A \cup C(A)$, no caso $x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$, ou seja, $x \in A \cup C(A)$, ou seja que $\mathcal{J} \subset A \cup C(A)$, e, pelo tanto, $A \cup C(A) = \mathcal{J}$.

Para demonstrar a igualdade $A \cap C(A) = \mathcal{J}$, provaremos que o conjunto $A \cap C(A)$ não contém nenhum elemento. De fato, de acordo com a igualdade $A \cup C(A) = \mathcal{J}$, qualquer elemento do conjunto $\mathcal{J}$ pertence a A ou a $C(A)$. Se $x \in A$, então $x \notin C(A)$ e, pelo tanto, $x \notin A \cap C(A)$. Por outro lado, si $x \in C(A)$, tem-se que $x \notin A$ e, novamente, $x \notin A \cap C(A)$. Então como o conjunto $A \cap C(A)$ não contem nenhum elemento, este conjunto é vazio, o seja, $A \cap C(A) = \emptyset$ $\square$

Exemplo 2.2. Demonstrar o princípio da dualidade.
Solução: Vamos demonstrar a primeira das igualdades; a segunda pode ser demonstrada de forma análoga. Seja que $x \in C(A \cup B)$, então teremos que $x \notin A \cup B$, ou seja, que $x \notin A \wedge x \notin B$. Claramente, pela afirmação anterior teremos que $x \in C(a) \wedge x \in C(b) \Rightarrow x \in C(A) \cap C(B)$, ou seja, temos que

$$C(A \cup B) \subset C(A) \cap C(B).$$

Suponhamos agora que $x \in C(A) \cap C(B)$, então teremos que $x \in C(A) \wedge x \in C(B)$, de onde obtemos que $x \notin A \wedge x \notin B$. Claramente temos que $x \notin A \cup B \Rightarrow x \in C(A \cup B)$. Agora podemos afirmar que

$$C(A \cup B) \supset C(A) \cap C(B).$$

Finalmente, levando em consideração as duas inclusões, é evidente pela definição 2.1 que

$$C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$$

$\square$

Exemplo 2.3. Demonstrar as igualdades:

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$$

Solução: Utilizando as propriedades 4), 5) e 6) do exemplo 2.1, obtemos:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

Agora temos que demonstrar que, por exemplo, $A \cap (A \cup B) = A$. Seja que $x \in A \cap (A \cup B)$, então temos que $x \in A \wedge x \in (A \cup B)$, ou seja, é claro que é válida a inclusão $A \cap (A \cup B) \subset A$. Mas se $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B)$, ou seja, $A \subset A \cap (A \cup B)$. Finalmente, temos que $A = A \cap (A \cup B)$ $\square$

Exemplo 2.4. Demonstrar a validade da inclusão

$$(A \backslash B) \subset (A \backslash D) \cup (D \backslash B).$$

Solução: Seja que $x \in (A \backslash B)$, então teremos que $x \in A \wedge x \notin B$. Se, além, temos que $x \in D$, então $x \in (D \backslash B)$ e, pelo tanto, $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$. No caso em que $x \notin D$, teremos que $x \in (A \backslash D)$ e, pelo tanto, $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$. Em ambos os casos, $x \in D$ como $x \notin D$, da condição $x \in (A \backslash B)$ teremos que $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$, ou seja, teremos que $(A \backslash B) \subset (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$. $\square$

Exemplo 2.5. Mostre que uma família R onde união e diferença são definidas como operações internas é um anel.
Solução: Sejam A e B conjuntos arbitrários da família R. Dado que $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$ e $A \subset R$, $A \backslash B \subset R$ então $A \cap B \subset R$. Portanto, as operações de união, interseção e diferença são operações internas em R, ou seja, a família R é um anel. $\square$

Exemplo 2.6. Mostre que uma família $R = \{\alpha, \emptyset\}$, composta de um conjunto não vazio α e do conjunto vazio $\emptyset$, forma um anel. Esta família é uma álgebra?
Solução: A união $\alpha \cup \emptyset = \alpha$ e as diferenças $\alpha \backslash \emptyset = \alpha$, $\emptyset \backslash \alpha = \emptyset$ também são elementos da família R. Ou seja, união e diferença são operações internas em R, ou seja, conforme o exemplo 2.5, é um anel. Como o elemento $\alpha \in R$ contém todos os outros conjuntos da família R, α é a unidade da família e R, uma álgebra. $\square$

Exemplo 2.7. Demonstrar que

$$(A \cap B) \times (D \cap E) = (A \times D) \cap (B \times E).$$

Solução: Seja $(x, y) \in (A \cap B) \times (D \cap E)$, então $x \in A \cap B$ e $y \in D \cap E$, o que é equivalente a $x \in A \wedge x \in B$ e $y \in D \wedge y \in E$. Dado que $x \in A \wedge y \in D$, tem-se que $(x, y) \in A \times D$. Analogamente, de $x \in B \wedge y \in E$ temos que $(x, y) \in B \times E$. Dado modo que $(x, y) \in (A \times D) \cap (B \times E)$ e

$$(A \cap B) \times (D \cap E) \subset (A \times D) \cap (B \times E).$$

Suponha agora que $(x, y) \in ((A \times D) \cap (B \times E))$. Neste caso temos, $(x, y) \in (A \times D) \wedge (x, y) \in (B \times E)$ e, pelo tanto, $x \in A \wedge y \in D$ e $x \in B \wedge y \in E$. Pelo tanto, $x \in (A \cap B)$ e $y \in (D \cap E)$, ou seja que, $(x, y) \in ((A \cap B) \times (D \cap E))$ e é verificada a inclusão

$$(A \cap B) \times (D \cap E) \supset (A \times D) \cap (B \times E).$$

Finalmente queda claro, utilizando as duas inclusões, que

$$(A \cap B) \times (D \cap E) = (A \times D) \cap (B \times E).$$

□

3 Funções

Definição 3.1. Chama-se aplicação de um conjunto E em um conjunto F (ou função definida em E com valores em F) a uma regra ou lei f que associa a cada elemento $x \in E$ um único elemento $y = f(x) \in F$.

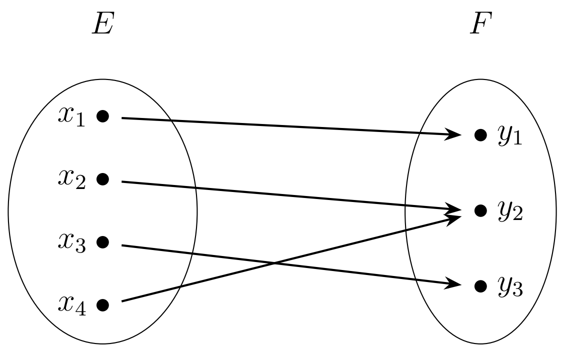

Fig. 10: Representação de uma função $f : E \to F$.

Definição 3.2. O elemento $x \in E$ é chamado de *variável independente* ou *argumento* da função f; o elemento $f(x) \in F$ é chamado de *valor da função* ou *imagem* de x por f; por sua vez, o elemento $x \in E$ também é denominado *pré-imagem* de $f(x)$.

Uma aplicação (ou função) costuma ser representada pela letra f, ou pelo símbolo $f : E \to F$, o qual indica que f associa a cada elemento de E um elemento de F. Também se utiliza a notação $x \mapsto f(x)$, que explicita a correspondência entre um elemento $x \in E$ e sua imagem $f(x) \in F$. Na maioria dos casos, as funções são definidas por meio de expressões algébricas (ou igualdades), que descrevem a lei de correspondência.

Exemplo 3.1. A função f pode ser definida pela igualdade $f(x) = \sqrt[3]{x^4+1}$, com domínio no intervalo $[a, b]$.

Exemplo 3.2. Pode-se definir a função *floor* (ou função *piso*) $f(x)$, que associa a qualquer número real $x \in \mathbb{R}$ o maior número inteiro menor ou igual a x (ver Fig. 11). Em notação matemática, temos:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) \equiv \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Algumas propriedades úteis da função piso são:

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$;
2. Se $x \in \mathbb{Z}$, então $\lfloor x \rfloor = x$;
3. Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se: $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$;
4. Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, vale: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$;
5. A função piso é não decrescente, ou seja, se $x \leq y$, então $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

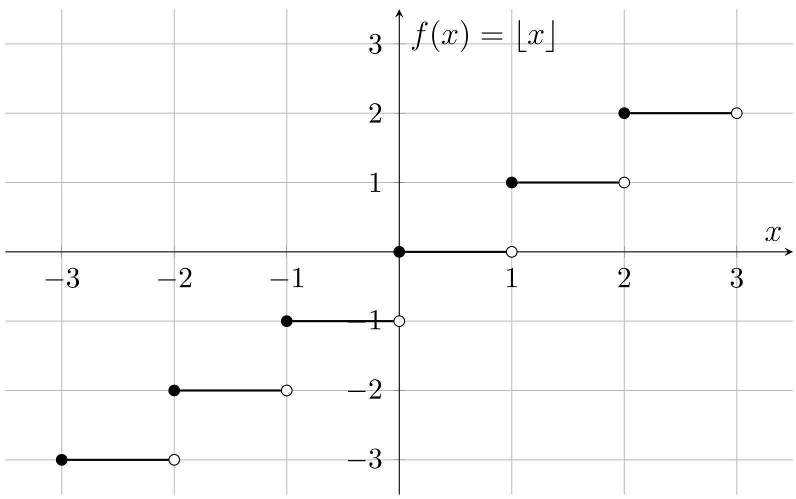

Fig. 11: Gráfico da função piso $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Exemplo 3.3. Sejam os conjuntos $E = \{0, 1, 2, \ldots, L-1\}$ e $F = \{0, 1, 2, \ldots, L^2 - 1\}$, com $L \in \mathbb{N}$. Podemos definir uma aplicação $f : E \times E \to F$ pela regra $f(i, j) = iL + j$.

Em simulações computacionais, essa aplicação é frequentemente usada para mapear redes bidimensionais regulares — como redes quadradas ou triangulares — em estruturas unidimensionais. Essa conversão facilita o tratamento computacional, tornando-o mais simples e eficiente.

3.1 Imagem e pré-imagem de um conjunto

Seja $f : E \to F$ uma aplicação e $D \subset E$ um subconjunto do domínio.

Definição 3.3. A *imagem* do conjunto D por meio da aplicação f é o subconjunto de F constituído por todos os elementos que são imagens, via f, de elementos de D. Denota-se por

$$f(D) = \{f(x) \in F : x \in D\}. \tag{18}$$

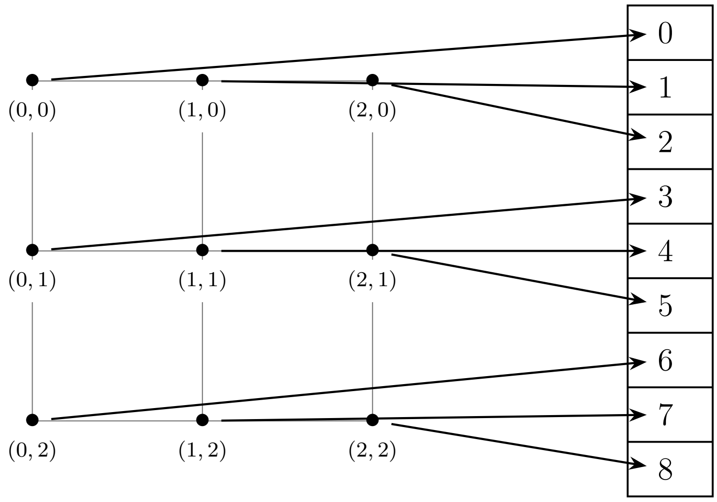

Fig. 12: Exemplo ilustrativo do mapeamento da rede bidimensional 3×3 em um vetor unidimensional usando a função $f(i, j) = 3i + j$.

Exemplo 3.4. Seja a aplicação $f : \mathbb{R} \to [-1, +1]$ definida por $f(x) = \sin(x)$. Determine $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Solução: Observamos que:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Como a função seno é contínua e estritamente crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ela assume todos os valores entre -1 e 1 nesse intervalo. Logo, a imagem do intervalo é:

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin(x) \mid x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = [-1, 1].$$

□

Exemplo 3.5. Demonstrar que se $f : E \to F$, $A \subset E$, $B \subset E$, então $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Solução: Seja que $y \in f(A \cup B)$. Pela definição da imagem de um conjunto (ver Definição 3.3), existe $x \in A \cup B$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in A \cup B$, então $x \in A \vee x \in B$. Em qualquer dos casos, teremos:

$$f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B),$$

ou seja, $f(x) \in f(A) \cup f(B)$, e portanto $y \in f(A) \cup f(B)$.

Como $y \in f(A \cup B)$ foi arbitrário, concluímos que

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

Observe que, em geral, a inclusão inversa $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ não é válida. □

Seja $f : E \to F$ uma aplicação e $Y \subset F$ um subconjunto do contradomínio.

Definição 3.4. O conjunto dos elementos de $x \in E$, cujas imagens, por meio da aplicação f, pertencem a Y é denominado *pré-imagem* de Y por f, e denota-se por

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E \mid f(x) \in Y\}. \tag{19}$$

Exemplo 3.6. Seja a aplicação $f : \mathbb{R} \to [-1, +1]$ definida por $f(x) = \sin(2x)$. Encontre $f^{-1}(\frac{1}{2})$.

Solução: Se $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, resulta que $2x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, então teremos que

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{x : \sin(2x) = \frac{1}{2}\right\} = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

□

Exemplo 3.7. Seja $f : E \to F$, e sejam $A \subset F$, $B \subset F$. Demonstrar que, se $A \subset B$, então $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Solução: Suponha que $x \in f^{-1}(A)$. Pela definição 3.4, isso significa que $f(x) \in A$. Como $A \subset B$, então $f(x) \in B$, e portanto $x \in f^{-1}(B)$.

Como a escolha de $x \in f^{-1}(A)$ foi arbitrária, concluímos que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. □

Definição 3.5. Uma aplicação $f : E \to F$ é denominada:

- *injetora* (ou uma *injeção*, ou ainda *aplicação injetiva*), se $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$; ou, equivalentemente, se para todo $y \in F$, a equação $f(x) = y$ tem no máximo uma solução em E;

- *sobrejetora* (ou uma *sobrejeção*, ou ainda *aplicação sobrejetiva*) se $f(E) = F$; ou, equivalentemente, se para todo $y \in F$, a equação $f(x) = y$ tem ao menos uma solução em E;

- *bijetora* (ou uma *bijeção*, ou ainda *aplicação bijetiva*) se f é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora; ou, equivalentemente, se para todo $y \in F$, a equação $f(x) = y$ tem uma única solução em E.

Vamos ver alguns exemplos ilustrativos de estos conceitos. Primeiro temos a Fig. 13 neste caso a aplicação $f : E \to F$ é injetora, pois os elementos de F são “flechados” só uma vez. Como cada elemento em F é colocado em correspondência com pelo menos um elemento de E, teremos que a aplicação também é sobrejetora. A aplicação é sobrejetora e injetora, então é bijetora. No exemplo da Fig. 14 podemos ver um exemplo de aplicação que não é nem injetora nem sobrejetora, pois, existem dois elementos de E com a mesma imagem e existe um elemento de F “sobrando”. O exemplo da Fig. 15 temos uma aplicação que é sobrejetiva, embora não seja injetiva, pois o elemento y_1 e imagem de x_1 e x_3. Finalmente, no exemplo da Fig. 16 temos uma aplicação que é injetora, mas não sobrejetora, pois o elemento $y_3 \in F$ não é imagem de nenhum elemento de E.

Exemplo 3.8. Mostre que a função $f : [0, 1] \to [0, 3]$ com $x \mapsto 2|x + 2| - 3$ é injetiva.

Solução: Seja $f : [0, 1] \to [0, 3]$ definida por $f(x) = 2|x + 2| - 3$.

Para todo $x \in [0, 1]$, temos que $x + 2 \in [2, 3]$, portanto $x + 2 \geq 0$.

Assim, o valor absoluto pode ser retirado diretamente:

$$f(x) = 2|x + 2| - 3 = 2(x + 2) - 3 = 2x + 4 - 3 = 2x + 1$$

Ou seja, em todo o domínio $[0, 1]$, a função se reduz a $f(x) = 2x + 1$, que é uma função estritamente crescente.

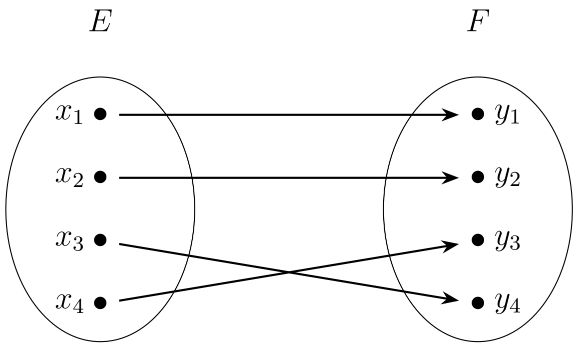

Fig. 13: injetora e sobrejetora.

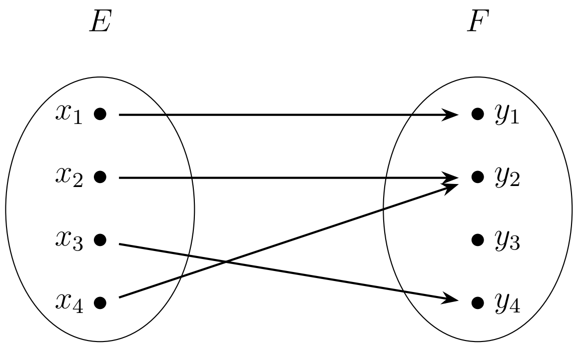

Fig. 14: não injetora e não sobrejetora

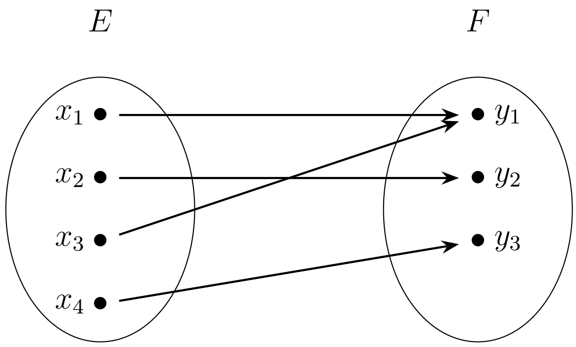

Fig. 15: não injetora e sobrejetora.

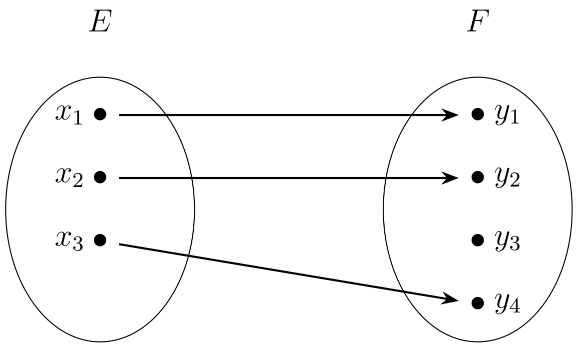

Fig. 16: injetora e não sobrejetora

Seja $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então:

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetiva no intervalo $[0, 1]$. $\square$

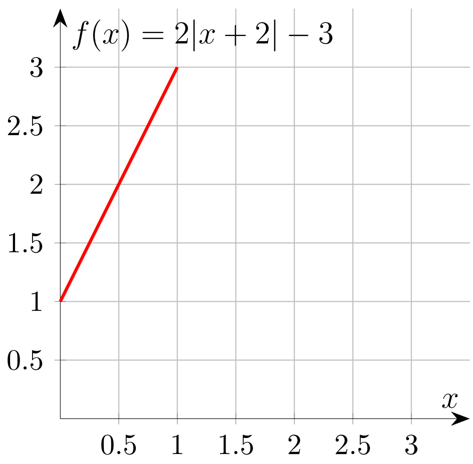

Fig. 17: Gráfico da função $f(x) = 2|x + 2| - 3$, com destaque no intervalo $x \in [0, 1]$.

Exemplo 3.9. Vamos retomar a aplicação do exemplo 3.3.

- *injetividade:* Sejam $(i_1, j_1) \in E \times E$ e $(i_2, j_2) \in E \times E$, onde $(i_1, j_1) \neq (i_1, j_1)$, então é claro que $f(i_1, j_1) \neq f(i_2, j_2)$.

- *sobrejetividade:* Notemos que $\forall k \in F$, exite um par $(i,j) \in E \times E$ tao que $f(i,j) = k$, ou seja $iL + j = k$, que é dado por

$$i = \left\lfloor \frac{k}{L} \right\rfloor, \quad j = k \pmod{L} \tag{20}$$

pelo tanto, a aplicação também é sobrejetora.

- *bijectividade:* A aplicação é bijetora, pois é injetora e sobrejetora.

3.2 Superposição de aplicações

Definição 3.6 (Composição de funções)**.** Sejam $f : E \to F$ e $g : F \to G$. Como $f(E) \subset F$, a cada elemento $f(x) \in f(E) \subset F$, a aplicação g associa um elemento $g(f(x)) \in G$. Dessa forma, utilizando a regra $g \circ f$, cada $x \in E$ é associado a um elemento $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in G$. Assim, define-se uma nova aplicação (ou função), denominada *composição*, *superposição de aplicações* ou *aplicação composta*.

Definição 3.7. Seja $f : E \to F$ uma aplicação bijetiva. Como f é bijetiva, para todo $y \in F$, existe um único $x \in E$ tal que $f(x) = y$. Denotamos esse elemento por $f^{-1}(y)$, isto é, $f^{-1}(y) = x$. Assim, define-se a aplicação $f^{-1} : F \to E$, denominada *aplicação inversa* ou *função inversa* de f.

Evidentemente, a aplicação f é inversa da aplicação f^{-1}. Por isso, diz-se que as aplicações f e f^{-1} são *reciprocamente inversas*. Para essas aplicações, valem as seguintes relações:

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in F; \tag{21}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in E. \tag{22}$$

Exemplo 3.10. Vamos retomar a aplicação dos exemplos 3.3 e 3.9. É claro que ela possui inversa, pois é bijetora. Dado um índice $k \in F$, a aplicação inversa f^{-1} retorna o par (i,j) tal que:

$$f^{-1}(k) = \left(\left\lfloor \frac{k}{L} \right\rfloor, \; k \bmod L \right).$$

Exemplo 3.11. Não é difícil ver que $f^{-1}(f(i,j)) = (i,j)$. De fato, temos $f(i,j) = iL + j$, com $(i,j) \in E \times E$, e $f^{-1}(k) = \left(\left\lfloor \frac{k}{L} \right\rfloor, \; k \bmod L \right)$, com $k \in F$. Então:

$$f^{-1}(f(i,j)) = f^{-1}(iL + j) = \left(\left\lfloor \frac{iL + j}{L} \right\rfloor, \; (iL + j) \bmod L \right).$$

Temos que:

$$\left\lfloor \frac{iL + j}{L} \right\rfloor = \left\lfloor i + \frac{j}{L} \right\rfloor = i.$$

A última igualdade é válida porque $0 \leq j \leq L - 1$, ou seja, $\frac{j}{L} < 1$, e portanto a parte inteira de $i + \frac{j}{L}$ é i. Para a segunda componente, temos que $(iL + j) \bmod L = j$[1], pois iL é múltiplo de L e $j < L$.

[1]Formalmente, podemos utilizar a seguinte propriedade: $(a + b) \bmod m = [a \bmod m + b \bmod m] \bmod m$.

Teorema 3.1. Sejam $f : E \to F$ e $g : F \to G$ duas aplicações. Demonstrar que:

(a) Se f e g são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.

(b) Se f e g são injetoras, então $g \circ f$ é injectora.

Demonstração. (a) Conhecemos que $f(E) = F$ e $g(F) = G$, então, $g(f(E)) = g(F) = G$.

(b) Sejam $x_1, x_2 \in E$, então se $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, dado que g é injetora, mas f também é injetora, então $x_1 = x_2$. De modo que $g \circ f$ é injetora. □

Teorema 3.2. Sejam $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ duas aplicações, e $C \subset Z$. Prove que

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

Demonstração. Seja que $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$, então teremos que existe $y \in C$ tal que $y = g(f(x))$. Como $g(f(x)) \in C$ teremos que $f(x) \in g^{-1}(C)$, então teremos que $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$, ou seja, queda mostrada a inclusão

$$(g \circ f)^{-1}(C) \subset f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

Agora vamos supor que $x \in f^{-1}(g^{-1}(C)) \Rightarrow f(x) \in g^{-1}(C) \Rightarrow g(f(x)) \in C$, o que é equivalente a $(g \circ f)(x) \in C$, de modo que $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$, pelo tanto queda mostrada a inclusão

$$(g \circ f)^{-1}(C) \supset f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

Utilizando as inclusões anteriores é claro que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. □

Teorema 3.3. Sejam A, B, C conjuntos e sejam

$$f : A \to B, \quad g : A \to B, \quad h : B \to C$$

aplicações. Suponha que h é injetora e que $h \circ f = h \circ g$. Então, $f = g$.

Demonstração. Notemos primeiro que f e g são ambas aplicações de A em B. Como $h \circ f = h \circ g$, então $h(f(x)) = h(g(x))$ $\forall x \in A$, agora como h é injetora, teremos que $f(x) = g(x)$, ou seja que $f = g$. □

Teorema 3.4. A composição de aplicações obedece a uma lei de associatividade. Isso é, se $h : U \to V$, $g : V \to W$, $f : W \to T$, são três aplicações, então

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Demonstração. Notemos que, para qualquer $x \in U$ teremos

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x),$$

então, é evidente que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. □

Teorema 3.5. Se X é um conjunto finito, e a transformação $f : X \to X$ é injetiva, então é bijetiva.

Demonstração. Só é necessário mostrar que f é sobrejetora, ou seja, que para qualquer elemento $x \in X$ é possível achar um x' tal que $f(x') = x$. Seja

$$f^{(k)}(x) \equiv (f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = f(f^{(k-1)}(x)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Como X é finito, a sequência $\{f^{(k)}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ eventualmente apresentará repetições. Suponha que, para certos inteiros $m > n \geq 0$, temos $f^{(m)}(x) = f^{(n)}(x)$.

Se $n > 0$, então aplicando f a ambos os lados da igualdade $f^{(m-1)}(x) = f^{(n-1)}(x)$ e utilizando a injetividade de f, obtemos:

$$f(f^{(m-1)}(x)) = f(f^{(n-1)}(x)) \Rightarrow f^{(m-1)}(x) = f^{(n-1)}(x).$$

Repetindo esse argumento um número suficiente de vezes, concluímos que:

$$f^{(m-n)}(x) = x.$$

Ou seja, x pertence a um ciclo da função f. Se tomarmos $x' = f^{(m-n-1)}(x)$, então:

$$f(x') = f(f^{(m-n-1)}(x)) = f^{(m-n)}(x) = x.$$

Portanto, existe $x' \in X$ tal que $f(x') = x$.

□

Definição 3.8. Sejam $\varphi : \Omega \to X$ e $\psi : \Omega \to Y$, e suponha-se que, pelo menos uma dessas aplicações — por exemplo, φ — seja bijetiva. Nesse caso, existe a aplicação inversa $\varphi^{-1} : X \to \Omega$ e, portanto, é possível definir a aplicação composta $\psi \circ \varphi^{-1} : X \to Y$.

Diz-se que uma aplicação definida dessa forma é dada *parametricamente* por meio das aplicações $\varphi : \Omega \to X$ e $\psi : \Omega \to Y$. A variável correspondente ao conjunto Ω é chamada de *parâmetro*.

Exemplo 3.12. Escreva as expressões explícitas das funções dadas em forma paramétrica:

(a) $x = a\cos(t), \quad y = a\sin(t), \quad 0 \leq t \leq \pi;$

(b) $x = a\cos(t), \quad y = a\sin(t), \quad \pi \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0).$

Solução: (*a*) A função $t \mapsto a\sin(t)$, com $t \in [0, \pi]$, é uma bijeção de $[0, \pi]$ em $[0, a]$, e a função $t \mapsto a\cos(t)$ é uma bijeção de $[0, \pi]$ em $[-a, a]$. Assim, para cada $x \in [-a, a]$, da igualdade $x = a\cos(t)$ pode-se determinar unicamente o parâmetro $t = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$ com $t \in [0, \pi]$. Substituindo esse valor em y, temos:

$$y = a\sin\left(\arccos\left(\frac{x}{a}\right)\right) = a\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(\frac{x}{a}\right)\right)} = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Ou seja, a função explícita correspondente é:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

(*b*) Seja $t = \pi + \tau$. Se $\tau \in [0, \pi]$, então $t \in [\pi, 2\pi]$. Nesse caso, a expressão de x torna-se $x = a\cos(\pi + \tau) = -a\cos(\tau)$. A função $\tau \mapsto -a\cos(\tau)$ é uma bijeção de $[0, \pi]$ em $[-a, a]$, de modo que, para cada $x \in [-a, a]$, temos $\tau = \arccos\left(-\frac{x}{a}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$. Substituindo em $y = a\sin(t) = a\sin(\pi + \tau) = -a\sin(\tau)$, obtemos:

$$y = -a\sin\left(\pi - \arccos\left(\frac{x}{a}\right)\right) = -a\sin\left(\arccos\left(\frac{x}{a}\right)\right) = -a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Portanto, a função explícita correspondente é:

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

□

Definição 3.9. Vamos supor que, num conjunto $G = X \times Y$ é definida uma aplicação $\mathcal{F} : G \to \Delta$, onde Δ contém o elemento neutro. Além disso, suponhamos que existem conjuntos $E \subset X$, $B \subset Y$ tais que $\forall x \in E$ fixo, a equação $f(x, y) = 0$ tem uma solução única $y \in B$. Neste caso, no conjunto E pode ser definida uma aplicação $f : E \to B$ que a todo $x \in E$ corresponda aquele valor $y \in B$ que, para todo x dado, seja a solução da equação $\mathcal{F}(x, y) = 0$.

No que diz respeito à aplicação $y = f(x)$, $x \in E$, $y \in B$, que acabamos de definir, diz-se que ela é dada *implicitamente* por meio da equação $\mathcal{F}(x, y) = 0$.

Exemplo 3.13. Achar a expressão explícita da função $f : [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \to [4\pi, 5\pi]$ definida implicitamente pela igualdade

$$\sin(x) - \cos(y) = 0, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \quad y \in [4\pi, 5\pi].$$

Solução: Como $\forall x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ fixo tem-se que $\sin(x) = q$, $q \in [-1, 1]$, então a definição implícita equivale à equação $\cos(y) = q$, que no segmento $[4\pi, 5\pi]$ tem solução única. De modo que fica evidente a existência da função $f : [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \to [4\pi, 5\pi]$.

Para escrever a expressão para f vamos transformar a igualdade

$$\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0,$$

$$2 \sin\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - y}{2}\right) = 0.$$

Então, igualando com cero cada fator, obtemos que

$$y = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$y = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vejamos que na primeira solução, com a condição $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ teremos que $y \in [(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi] \not\subset [4\pi, 5\pi] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $y = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ não é um valor da função f para nenhum $k \in \mathbb{Z}$. No caso da segunda solução, da condição $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ temos que $y \in [(2k - 2)\pi, (2k - 1)\pi] \subset [4\pi, 5\pi]$ se $k = 3$. Então para esse valor de k, e, utilizando a segunda solução, obtemos a expressão explícita da função f:

$$y = -x + \frac{13\pi}{2}, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

□

Definição 3.10. Uma aplicação $f : E \to F$ é denominada *prolongação* da aplicação $g : D \to F$, e g é chamada *restrição* da aplicação f se $E \supset D$ e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D$.

Definição 3.11. É denominado *gráfico* de uma aplicação $f : E \to F$ ao conjunto

$$G = \{(x, f(x)) : x \in E \wedge f(x) \in F\}. \tag{24}$$

Evidentemente, $G \subset E \times F$.

3.3 Exercícios

Exemplo 3.14 . Demonstrar que se $f : E \to F$ e $A \subset E$, $B \subset E$, então é verificada a igualdade $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Solução: Pela definição 3.3 temos que

$$f(A \cup B) = \{f(x) : x \in A \cup B\}.$$

Seja $f(x) \in f(A \cup B)$, então $x \in A \cup B$, ou seja, $x \in A \vee x \in B$. Pelo anterior temos que $f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$, o que implica que $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. De modo que a inclusão $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ é mostrada.

Agora, vamos considerar que $f(x) \in f(A) \cup f(B)$, então $f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$, de modo que $x \in A \vee x \in B$, ou seja $x \in A \cup B$, pelo que podemos afirmar que $f(x) \in f(A \cup B)$ e $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.

Finalmente, utilizando as duas inclusões, obtemos a igualdade desejada. $\square$

Exemplo 3.15 . Demonstrar que se $f : E \to F$ e $A \subset F$, $B \subset F$, então verificam-se as igualdades

(a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(b) $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$;

(c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Solução: (a) Dado $x \in f^{-1}(A \cap B)$, então $f(x) \in A \cap B$, ou seja, $f(x) \in A \wedge f(x) \in B$. Pelo anterior, temos que $x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B)$, ou seja, que $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Deste modo, temos a inclusão $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Para demonstrar a inclusão inversa, vamos supor que $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Assim temos, $x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B)$, de onde $f(x) \in A \wedge f(x) \in B$, pelo qual $f(x) \in A \cap B$ e $f(x) \in f^{-1}(A \cap B)$. Finalmente temos mostrado que $f^{-1}(A \cap B) \supset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, e, conjuntamente com a primeira inclusão, queda mostrada a igualdade.

(b) Seja $x \in f^{-1}(A \backslash B)$, então $f(x) \in A \backslash B$, ou seja, $f(x) \in A \wedge f(x) \notin B$. Pelo anterior temos que $x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B)$, e, pelo tanto $x \in f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$. Deste modo temos a inclusão $f^{-1}(A \backslash B) \subset f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$. Agora, temos que se $x \in f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$, então é claro que $x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B)$, de onde $f(x) \in A \wedge f(x) \notin B$, ou seja, $f(x) \in A \backslash B$, finalmente temos que $x \in f^{-1}(A \backslash B)$, de onde mostramos a inclusão $f^{-1}(A \backslash B) \supset f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$. Pelas duas inclusões, podemos assegurar a igualdade.

(c) Se $x \in f^{-1}(A \cup B)$, então $f(x) \in A \cup B$. Pelo tanto, $f(x) \in A \vee f(x) \in B$, o que indica que $x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B)$, ou seja $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, de modo que temos a inclusão $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Se agora $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, então $x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B)$ e pelo tanto, $f(x) \in A \vee f(x) \in B$, ou bem $f(x) \in A \cup B$, de onde $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Finalmente obtemos a segunda inclusão $f^{-1}(A \cup B) \supset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, o que termina demonstrando a igualdade. $\square$

Exemplo 3.16 . Seja $f : E \to F$, e seja P uma família de subconjuntos do conjunto E, e Q uma família de subconjuntos do conjunto F. Designemos:

$$f(P) = \{f(A) \in Q : A \in P\}, \qquad f^{-1}(Q) = \{f^{-1}(B) \in P : B \in Q\}.$$

Demonstrar que:

(a) Se Q é um anel, também $f^{-1}(Q)$ é um anel;

(b) Se P é um anel $f(P)$ não é necessariamente também um anel.

Solução: (a) Se Q é um anel, então $B_1 \in Q$, $B_2 \in Q$ implica que $B_1 \cup B_2 \in Q$, $B_1 \cap B_2 \in Q$, e $B_1 \backslash B_2 \in Q$. Pelo tanto, utilizando o exemplo 3.15, teremos que

$$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2) \in f^{-1}(Q),$$

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in f^{-1}(Q),$$

$$f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \backslash B_2) \in f^{-1}(Q),$$

ou seja, temos que $f^{-1}(Q)$ é um anel.

(b) Neste casso vamos achar um contraexemplo. Dado $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{a', b', d'\}$, $f(a) = a'$, $f(b) = f(c) = b'$, $f(d) = d'$. A família

$$P = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \emptyset\},$$

é um anel, mas $f(\{a, b\}) \backslash f(\{c, d\}) = \{a', b'\} \backslash \{b', d'\} = \{a'\} \notin f(P)$, ou seja, $f(P)$ não é anel. □

Exemplo 3.17. Qual das funções $f : [0, 1] \to [0, 3]$ seguintes:

(a) $x \mapsto 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$;

(b) $x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$;

(c) $x \mapsto 3^x$;

(d) $x \mapsto 12(x - \frac{1}{2})^2$;

(e) $x \mapsto 3 - \frac{16}{3}(x - \frac{1}{4})^2$;

Solução: (a) Dado que para qualquer $y \in [0, 3]$, a equação $y = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ tem uma solução única $x = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{y}{3}\right)$ no segmento $[0, 1]$, a função $x \mapsto 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ é bijetiva (ver Fig. 18–a).

(b) Seja $y \in [0, 1]$. Então, a equação

$$y = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

tem solução única $x = \dfrac{4}{\pi} \arctan(y)$, no segmento $[0, 1]$, sempre que $y \in [0, 1]$. Quando $y \in]1, 3]$, a equação não tem solução em $[0, 1]$. Então, $\forall x \in [0, 3]$ a equação tem não mais de uma solução $x \in [0, 1]$, ou seja, a função $x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$ é injetora (ver Fig. 18–b).

(c) Se $y \in [0, 3]$, a equação $y = 3^x$ tem não mais de uma solução $x \in [0, 1]$. Se $y \in [1, 3]$ a solução é $x = \log_3(y)$; para $y \in [0, 1[$ não temos soluções. Então $x \mapsto 3^x$ é injectora (ver Fig. 18–c)

(d) Da equação $y = 12\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ com $y \in [0, 3]$, teremos que $x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{3}}$, $x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{3}}$. Se $0 < 0 \leq 3$, as duas raízes estão em $]0, 1]$; se $y = 0$, as duas raízes coincidem $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$ e estão em $[0, 1]$. Então, $\forall y \in [0, 3]$ a equação $y = 12\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ tem pelo menos uma solução em $[0, 1]$, o que indica que a função é sobrejetora (ver Fig. 18–d)

(e) A equação $y = 3 - \dfrac{16}{3}\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2$ tem as seguintes soluções:

$$x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{9-3y}, \quad \frac{8}{3} \leq y \leq 3 \quad \text{em} \quad \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9-3y}, \quad 0 \leq y \leq 3 \quad \text{em} \quad \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

De modo que, $\forall y \in [0,3]$ existem uma o duas pré-imagens, pelo qual a função é sobrejetiva (ver Fig. 18–e). $\square$

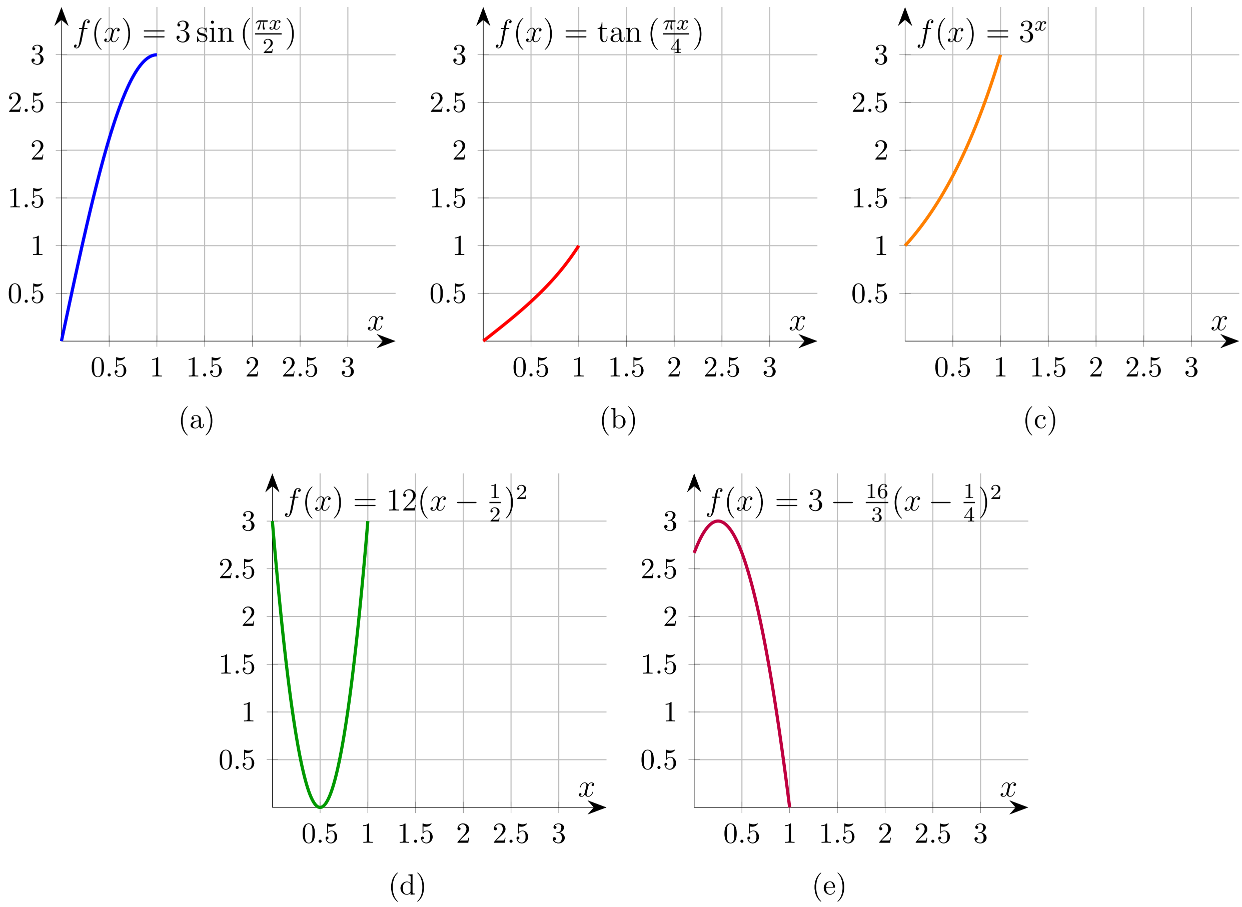

Fig. 18: Gráficas de funciones $f : [0,1] \to [0,3]$

Exemplo 3.18. Seja a função $f(x) = \tan(x)$, com $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$. Achei a função inversa.

Solução: Vamos mostrar que a função dada é uma bijeção $f :]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. Com este fim, vamos designar $x = 2\pi + \tau$, com $-\dfrac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$. Pelo tanto, $\forall y \in \mathbb{R}$ a equação $y = \tan(x)$ tem a forma $y = \tan(\tau)$, com $\tau \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de onde $\tau = \arctan(y)$. Levando em conta que $x = 2\pi + \tau$, temos que $x = 2\pi + \arctan(y)$; além, se $y \in \mathbb{R}$ teremos $x \in]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$, ou seja, a bijeção da função queda estabelecida. Dado que a todo $y \in \mathbb{R}$ corresponde um valor único $x \in]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$, a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ é determinada pela correspondência $y \mapsto 2\pi + \arctan(x)$, com $x \in]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$. $\square$

4 Conjuntos Finitos

Definição 4.1. Diz-se que dois conjuntos são *equivalentes* quando existe uma correspondência biunívoca entre eles. Se os conjuntos A e B são equivalentes, escrevemos $A \sim B$; caso contrário, escrevemos $A \nsim B$.

As relações de equivalência entre conjuntos possuem as seguintes propriedades:

1. **Reflexividade:** Todo conjunto é equivalente a si mesmo, ou seja, $A \sim A$.

2. **Simetria:** Se $A \sim B$, então $B \sim A$.

3. **Transitividade:** Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

Se $A \sim B$, diz-se que os conjuntos A e B têm *igual potência*.

Se $A \nsim B$, mas existe um subconjunto $B_1 \subset B$ tal que $A \sim B_1$, então diz-se que o conjunto A tem *potência menor* que o conjunto B.

Definição 4.2. Um conjunto $A \neq \emptyset$ é chamado *finito* se existe um número $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \sim \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Nesse caso, costuma-se dizer que o conjunto A contém n elementos ou que ele tem *potência* n, e escreve-se $|A| = n$.

O conjunto vazio $\emptyset$ também é considerado finito, e sua potência é tomada igual a zero, ou seja, $|\emptyset| = 0$.

Definição 4.3. Um conjunto que não é finito é chamado *infinito*.

Definição 4.4. Dizemos que um conjunto A é *numerável* se $A \sim \mathbb{N}$. Dizemos que o conjunto numerável tem *potência numerável*.

Se o conjunto é finito e numerável, diz-se simplesmente que ele é *numerável*.

Definição 4.5. Diz-se que um conjunto é *incontável* se ele tem potência maior do que a do conjunto $\mathbb{N}$.

Teorema 4.1 (Teorema de Cantor)**.** São verdadeiras as proposições seguintes:

1. O conjunto de todos os números racionais é numerável.

2. O conjunto de todos os números reais é incontável.

Lema 4.1. Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos. Então, $A \cup B$ é finito e satisfaz

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{25}$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos tais que $A \cap B = \emptyset$ e ambos finitos $|A| < \infty$ e $|B| < \infty$. Pela definição 4.2, existem bijeções

$$\begin{aligned} f &: A \to \{1, 2, \dots, |A|\}, \\ g &: B \to \{1, 2, \dots, |B|\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Como $A \cap B = \emptyset$, podemos definir a aplicação $h : A \cup B \to \{1, 2, \dots, |A| + |B|\}$ com

$$h(x) = \begin{cases} f(x); & x \in A \\ |A| + g(x); & x \in B \end{cases} \tag{27}$$

onde, sem perda de generalidade, vamos considerar $|A| \leq |B|$. Mostremos que h é uma bijeção

1. *Injetividade:* Sejam $x, y \in A \cup B$ tais que $h(x) = h(y)$. Analisamos os casos:

   a) Se $x, y \in A$, então temos que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

   b) Se $x, y \in B$, então temos que $|A| + g(x) = |A| + g(y) \Rightarrow g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$.

   c) Se $x \in A$ e $y \in B$, então $h(x) = f(x) \leq |A|$ e $h(y) = |A| + g(x) \geq |A|$, logo $h(x) \neq f(y)$.

2. *Sobrejetividade:* Seja $m \in \{1, 2, \ldots, |A| + |B|\}$

   a) Se $1 \leq m \leq |A|$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = m$. Assim, $h(x) = m$.

   b) Se $|A| < m \leq |B|$, existe $y \in B$ tal que $g(y) = m - |A|$. Logo, $h(y) = m$.

Pelo tanto, h é bijetora entre $A \cup B$ e $\{1, 2, \ldots, |A| + |B|\}$, de modo que $A \cup B \sim \{1, 2, \ldots, |A| + |B|\}$. Como consequência, $A \cup B$ é finito. Então é claro que $|A \cup B| = |A| + |B|$ $\square$

Exemplo 4.1. Seja J um conjunto finito, e $A \subset J$. conhecemos que $A \cap C_J(A) = \emptyset$, então pelo lema 4.1 teremos que $|J| = |A| + |C_J(A)|$.

Exemplo 4.2. Sejam um par de conjuntos A e B, é claro que os conjuntos $A \cap B$ e $A \backslash B$ são disjuntos, além de que $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$, então, pelo lema 4.1 obtemos que $|A| = |A \cap B| + |A \backslash B|$.

4.1 Princípio da Inclusão-Exclusão

Teorema 4.2 (Princípio de Inclusão-Exclusão)**.** Sejam A e B dois conjuntos finitos quaisquer. Então

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{28}$$

Demonstração. Vamos considerar as decomposições

$$A = (A \cap B) \cup (A \backslash B), \quad B = (B \cap A) \cup (B \backslash A). \tag{29}$$

Pelo lema 4.1 teremos que

$$|A| = |A \cap B| + |A \backslash B|, \quad |B| = |B \cap A| + |B \backslash A|. \tag{30}$$

Agora é claro que

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A) \cup (B \cap A) \\ &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A) \\ &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B). \end{aligned} \tag{31}$$

Onde na primeira igualdade utilizamos a propriedade comutativa da união, e na segunda igualdade utilizamos a idempotência de $A \cap B$. Como os conjuntos $A \backslash B$, $B \backslash A$ e $A \cap B$ são disjuntos dois a dois, é claro que

$$|A \cup B| = |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B|. \tag{32}$$

Agora somando as equações (30), resulta

$$|A| + |B| = |A \backslash B| + |B \backslash A| + 2|A \cap B|. \tag{33}$$

Finalmente subtraindo (32) e (33) obtemos

$$|A \cup B| - |A| - |B| = -|A \cap B| \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{34}$$

$\square$

4.1.1 Generalização do Princípio

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Então:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Demonstração. Vamos utilizar o princípio de indução:

1. *base da indução:* Para $n = 1$, temos:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right| = |A_1|,$$

2. *passo indutivo:*

   Suponha que a fórmula é válida para $n = k$. Isto é, suponha que:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le k} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_s}\right|.$$

   Queremos mostrar que a fórmula também vale para $k + 1$. Note que:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right|.$$

   Pelo passo indutivo, sabemos o valor de $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right|$. Resta analisar:

$$\left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})\right|.$$

   Como cada $A_i \cap A_{k+1}$ é subconjunto finito, podemos aplicar a hipótese de indução a essa nova união de k conjuntos:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})\right| = \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le k} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_s} \cap A_{k+1}\right|.$$

   Substituindo todos os termos, obtemos a fórmula desejada para $k + 1$, o que conclui a indução.

□